

線形代数学・同演習 A

演習問題 1

1. (1) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
(4) $\begin{pmatrix} 46 \\ 59 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O_{2,2}$ (6) $\begin{pmatrix} -8 & 11 & 20 \end{pmatrix}$

2. (1) $\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$

3.† 計算するだけなので省略 .

4. (1) $(x, y, u, v) = (2, 0, 3, 7)$ (2) $(x, y, u, v) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 4, 2)$

5.† (1) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $A - B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ (3) $AB = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$
(4) $BA = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ (5) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (6) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

(7) $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$

6. $(x, a, b) = (3, 3, 2)$

逆行列については 4 月 18 日の講義参照のこと . $PB = AP$ として両辺をそれぞれ計算して , 成分を比較すると計算が楽である .

線形代数学・同演習 A

演習問題 2

1.† $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおく . $\det A = ad - bc, \det B = xw - yz$ なので

$$\det A \det B = (ad - bc)(xw - yz) = adxw - adyz - bcxw + bcyz$$

である . 一方 , $AB = \begin{pmatrix} ax + by & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix}$ なので ,

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) \\ &= (acxy + adxw + bcyz + bdzw) - (acxy + adyz + bcxw + bdzw) \\ &= adxw + bcyz - adyz - bcxw. \end{aligned}$$

二つを比較すれば $\det A \det B = \det(AB)$ となることが分かる .

2.† $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix}$ なので ,

$$\begin{aligned} &A^2 - (a + d)A + (ad - bc)E_2 \\ &= \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & bc + d^2 \end{pmatrix} - (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + (ad - bc)E_2 \\ &= \begin{pmatrix} (a^2 + bc) - (a + d)a + (ad - bc) & (ab + bd) - (a + d)b \\ (ac + dc) - (a + d)c & (bc + d^2) - (a + d)d + (ad - bc) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. (1) $\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. (1) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) 逆行列を持たない (3) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

5. (1) $a \neq 0$ (2) $a \neq \frac{3}{2}$ (3) $a \neq 0$

6. a, b, c, d は実数とする .

上三角行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ 下三角行列 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix}$

対称行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ 交代行列 $\begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$

7. a, b, c, d, e, f は実数とする .

$$\begin{array}{lll} \text{対角行列} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} & \text{上三角行列} \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix} & \text{下三角行列} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{pmatrix} \\ \text{対称行列} \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix} & \text{交代行列} \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} & \end{array}$$

$$8.^\dagger \quad A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とおき , } {}^tAA = E_2 \text{ を考える . すると}$$

$$(1) \ a^2 + c^2 = 1, \quad (2) \ ab + cd = 0, \quad (3) \ b^2 + d^2 = 1$$

となる . ここで (1) より $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ とおける . (2) より , (b, d) は $(\cos \theta, \sin \theta)$ と直交しており , さらに (3) よりその大きさは 1 である事がわかるので , $(b, d) = (-\sin \theta, \cos \theta)$ or $(\sin \theta, -\cos \theta)$ でなければならないことが分かる .

$$9. \quad (1) \ 0 \quad (2) \ \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$10.^\dagger \quad (1) \ \text{たとえば} \ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \ \text{存在しない} \cdot^{*1} \quad (3) \ \text{たとえば} \ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

*¹ 問題の E_3 は誤りで , 正しくは E_2 です .

線形代数学・同演習 A

演習問題 3

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \textcircled{1} \quad (1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 49 \\ 173 \\ -132 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & (7) \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} -59 \\ 85 \\ 82 \\ -89 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} -188 \\ -118 \\ 116 \\ -97 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & \times (1) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 11 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 9 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -49 \\ -173 \\ 132 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (6) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & (7) \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 59 \\ -85 \\ -82 \\ 89 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 188 \\ 118 \\ -116 \\ 97 \\ -5 \end{pmatrix} \quad (10) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

(3), (8) は基本問題としては不適でした．失礼しました．

$$2. \quad Q_3(i; \lambda)^{-1} = Q_3(i; \frac{1}{\lambda})$$

$$P_3(i, j)^{-1} = P_3(i, j)$$

$$R_3(i, j; \lambda)^{-1} = R_3(i, j; -\lambda)$$

$$3. \quad (1) \text{ 持たない } (2) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ -15 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 5 & 11 & 12 \\ -3 & -5 & -4 \\ -1 & -7 & -4 \end{pmatrix}$$

4.* a, b, c がすべて互いに異なるときに唯一の解を持ち，その解は

$$(x, y, z) = \left(\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}, \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} \right).$$

線形代数学・同演習 A

演習問題 4

1. 階数は (1) 2 (2) 3 (3) 2

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.† 階数は (1) 3 (2) 3 (3) 2

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.† \quad (1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(4) 解なし (5) 解なし (6) 解なし (7) 解なし

$$(8) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.* $(a, b, c) = (6/5, -3, 2)$ or $(1/2, 1/2, 2)$.

行列の列を入れ替えても行列の階数は変わらないことを利用すると楽.

線形代数学・同演習 A

演習問題 5

$$1. \quad (1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{簡約化は} \quad (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2.^\dagger \quad (1) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{簡約化は} \quad (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3.^\dagger \quad \bigcirc \quad (1) \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ -1 & -4 & -5 \\ -4 & -17 & -22 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -14 & 10 & -7 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \text{ 逆行列なし}$$

$$\begin{aligned}
& (4) \begin{pmatrix} 10 & 27 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \text{ 逆行列なし} \quad (6) \begin{pmatrix} 34 & 124 & -10 & -7 \\ 10 & 36 & -3 & -2 \\ 2 & 11 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
& \times (1) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 5 & -9 & -18 \\ 3 & -9 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -8 & 16 & -9 \\ -1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \text{ 逆行列なし} \\
& (4) \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & -8 & -1 \\ -2 & 13 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) \text{ 逆行列なし} \quad (6) \begin{pmatrix} 35 & -74 & -6 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -10 & 21 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4.[†] B, C がともに A の逆行列とすると, $AB = BA = E, AC = CA = E$ である. さて, 行列の積は結合法則を満たすので, $(BA)C = B(AC)$ であるが,

$$(BA)C = EC = C, \quad B(AC) = BE = B$$

なので $B = C$ でなければならない.

5. ならない. 例えば $A = E_2, B = -E_2$ とすればよい.

6. なる. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ である.

7.* プログラミングの本を参照のこと.

線形代数学・同演習 A

演習問題 6

1. 平面 P は $\langle a|x \rangle = d$ とかける．点 x_0 は平面 P 上にあるので $\langle a|x \rangle = d$ をみたすので，これらを辺々引けば，内積の線形性より $\langle a|x - x_0 \rangle = 0$ となる．
2. θ を 2 つのベクトルのなす角とする．
 (1) $\cos \theta = \frac{4}{5}$ (2) $\cos \theta = \frac{11}{14}$ (3) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4) $\cos \theta = 0$ (直交している)
3. $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ($t \in \mathbb{R}$ はパラメータ)
4. $2y + z = 3$
5. (1) $x - 2y + z = 0$ (2) $y + z = 1$ (3) $8x + 14y + 9z = 29$ (4) $bcx + cay + abz = abc$
6. (a) 求める平面は $x = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ なので，標準形に戻せば $5x + 11y - 2z = -58$ ．(b) $5x + 11y - 2z = 3$ (求める平面は直線 l_1, l_2 と平行なので (a) と同じ法線ベクトルを持つ)．
7. 原点と平面との距離は $\frac{1}{3}$ ．
 平面において原点と直線との距離を与える方向は，直線と垂直になる方向であったように，3次元空間において原点と平面との距離を与える方向は平面に沿う方向と垂直な方向である．*1それは問題 2 より法線ベクトル $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．そこで，原点と平面との距離を d で表すと，空間上の点 $d \cdot \frac{a}{\|a\|}$ は平面上にあるので， $\langle a | d \cdot \frac{a}{\|a\|} \rangle = 1$ を満たす．これより $d = \frac{1}{\|a\|} = \frac{1}{3}$ ．
8. $\sqrt{\frac{26}{3}}$ ． $x = 1 + s, y = -5 - s, z = 2 + s$ なので， $d(s) := (1 + s)^2 + (-5 - s)^2 + (2 + s)^2$ が最小になるような s を求めればよい．
9. (1) $(0, -8, 0)$ (2) $(1, 1, -2)$ 計算方法は次回の演習問題を参照のこと．
10. ベクトル $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ に対して， $\rho(x) = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}$ とすれば，

$$\rho(x \times y) = [\rho(x), \rho(y)], \quad x \times y = \rho(x)y$$

などが成り立つ．他にも四元数とも関係があって，調べてみると面白い．

5月23日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*1 後期に微積分で習う偏微分を使っても求めることができる．

線形代数学・同演習 A

演習問題 7

1. 講義中の 2×2 のときと同様、 e_j を j 行目のみ 1 でそれ以外は 0 であるベクトルとすれば、 $x = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ は

$$x = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$$

と書けることに注意。 f の線形性より $f(x) = \sum_{j=1}^n x_j f(e_j)$ なので、 $f(e_j) = {}^t(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ とおけば $f(x) = Ax$ である。ただし、 $A = (a_{ij})$ 。

2. 図形は次ページ。面積は (1) 1 (2) 15 (3) 16 (4) 0
3. 2 点 $(0, 1)$ と $(0, 1)$ が移動する点を考えればよい。この 2 点は原点の隣にあるので、移ることができる点は $(1, 2)$ と $(-1, 2)$ 。よって $f_1(x) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 。

4. (1) 平面のパラメータ表示 $x = sa + tb$ ($s, t \in \mathbb{R}$) を標準型にもどせばよい。各成分ごとに見ると $x = a_1 s + b_1 t$, $y = a_2 s + b_2 t$, $z = a_3 s + b_3 t$ なので、 x, y に関する式を解いて*1

$$s = \frac{b_2 x - b_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad t = \frac{-a_2 x + a_1 y}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

これを z の式に代入して式を整理すれば、求める式を得る。

- (2) 定義に従って計算するのみ。(3) $\langle a | b \rangle = \|a\| \cdot \|b\| \cos \theta$ より。(4) 外積の成分表示より明らか。(5) 外積の成分表示を用いて地道に計算するだけ。

5 月 30 日分 (凡例：無印は基本問題、† は特に解いてほしい問題、* は応用問題)

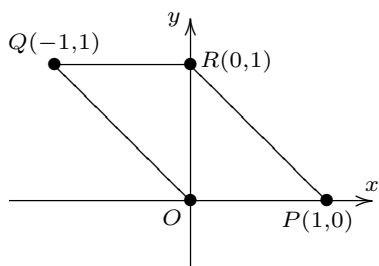
講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*1 講義初回に紹介した逆行列を用いる方法が簡単。もちろん掃き出し法でも計算できる。

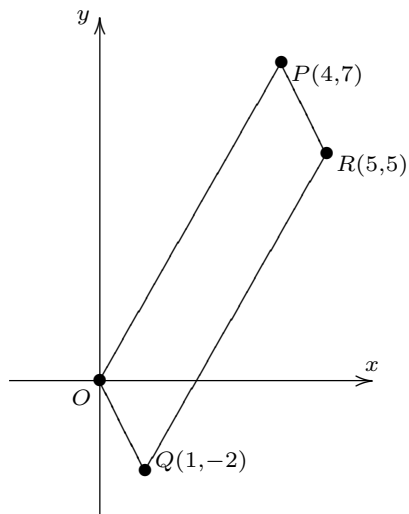
問題 3 の解答図 . 図中の P, Q, R はそれぞれ以下を表している :

$$(1, 0) \mapsto P, \quad (0, 1) \mapsto Q, \quad (1, 1) \mapsto R.$$

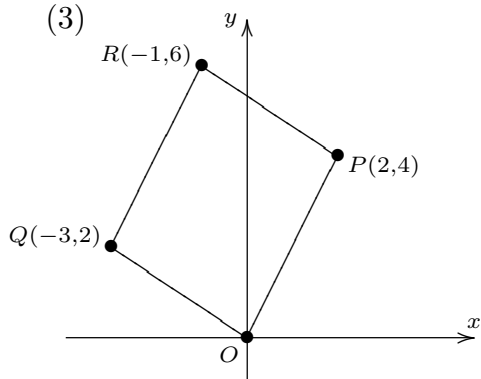
(1)



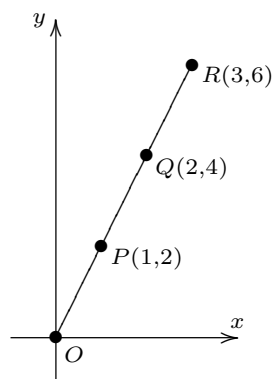
(2)



(3)



(4)



線形代数学・同演習 A

演習問題 8

1. (1) 7 (2) 36 (3) -12 (4) -10
2. (1) $a^2 + b^2$ (2) 0 (3) $1 + a^2 + b^2 + c^2$
3. (1) $(c-b)(c-a)(b-a)$ (2) $(a+b+c)(ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2)$
(3) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$
4. (1) $\begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 11 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$
5. x, y を任意の \mathbb{R}^n のベクトルとし, 実数 t を任意にとる. このとき, ベクトル $tx + y$ を考える. ノルム $\|\cdot\|$ の定義および内積 $\langle \cdot | \cdot \rangle$ の双線形性から

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = \langle tx + y | tx + y \rangle = \|x\|^2 \cdot t^2 + 2\langle x | y \rangle \cdot t + \|y\|^2.$$

つまり, t に関する 2 次関数 $\|x\|^2 \cdot t^2 + 2\langle x | y \rangle \cdot t + \|y\|^2$ が常に ≥ 0 である事がわかる. これより, この二次多項式の判別式は常に ≤ 0 となるので,

$$(2\langle x | y \rangle)^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0,$$

これより $|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ を得る.

6. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ において計算するだけ.
7. 成立しない. 例えば $A = B = E_2$ としても $\text{tr}(E_2) = 2$ より

$$\text{tr}(AB) = \text{tr}(E_2) = 2 \neq 4 = \text{tr}(A) \text{tr}(B)$$

である.

8. 求める体積 V は $|\langle b-a | (c-a) \times (d-a) \rangle|/6$ なので, $(x, y, z) := \langle x | y \times z \rangle$ という記号を導入すれば,

$$V = \frac{|(a, b, c) - (b, c, d) + (c, d, a) - (d, a, b)|}{6}$$

となる.

線形代数学・同演習 A

演習問題 9

1. 偶置換は

ε (単位置換),
(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4),
(1, 3, 2), (1, 4, 2), (1, 4, 3), (2, 4, 3),
(1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4), (1, 4) \circ (2, 3)

の 12 個 . そして奇置換は

(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4),
(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4),
(1, 4, 3, 2), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3)

の 12 個 .

2. 1 が移り得るのは n 通り , 2 が移り得るのは $(n-1)$ 通り , と順に移れる可能性を考えていくと , k が移り得るのは $(n-k+1)$ 通りの可能性があることが分かる . よって , S_n は $\prod_{k=1}^n (n-k+1) = n!$ 個の元がある .

$$3.^\dagger \quad (1) \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$
$$(2) \quad \sigma \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau \circ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4.^\dagger \quad (a) \ 1 \quad (b) \ 1 \quad (c) \ -1 \quad (d) \ -1 \quad (e) \ -1 \quad (f) \ -1$$

5. 例えば (a) では , $(12) \circ (34) = (34) \circ (12) = (34) \circ (23) \circ (23) \circ (12)$ など .

6. 各 i に対して $k_i \xrightarrow{1\text{回}} k_{i+1} \xrightarrow{2\text{回}} \dots \xrightarrow{r-1\text{回}} k_{i-1} \xrightarrow{r\text{回}} k_i$ となるので .

7. $\text{sgn } \sigma_n = (-1)^{[n/2]}$. ただし , $[x]$ はガウス記号で x を超えない最大の整数を表す .

σ_n の構成から , σ_n は互換 $(1 \ n), (2 \ n-1)$ たちの積でかける . $n = 2k$ のときは互換の数は k 個 , $n = 2k+1$ のときは互換の数は k 個なので , まとめて書けば $[n/2]$ 個となる .

8. σ を巡回置換とすると , その定義より , 巡回域に属さない数 k に対しては $\sigma(k) = k$ である . さて , そのことを踏まえると , k が巡回置換 σ, τ どちらの巡回域にも属さない

のならば, $(\sigma \circ \tau)(k) = (\tau \circ \sigma)(k) = k$ である. 次に, k が σ の巡回域に属しているが τ の巡回域には属していないとする. つまり, $\tau(k) = k$. このとき, σ と τ は互いに素であるため, $\sigma(k)$ は τ の巡回域に属さない. したがって,

$$(\tau \circ \sigma)(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k) = \sigma(\tau(k)) = (\sigma \circ \tau)(k).$$

k が τ の巡回域に属しているが σ の巡回域には属していないときも同様に示せる.

9.[†] (a) $(1\ 3\ 6\ 7\ 2)(4\ 5)$ (b) $(1\ 3\ 5\ 6)(2\ 4)$ (c) $(1\ 3\ 6)(2\ 5\ 4)$ (d) $(1\ 3)(2\ 4\ 5)$

線形代数学・同演習 A

演習問題 10

1. (1) 1 (2) 5 (3) 19 (4) -8 (5) 100 (6) -40

2.[†] (1) 17 (2) 64 (3) 52

3.[†] (1) -6 (2) 6 (3) 0 (4) 6

(2) は 2 列目と 4 列目および 2 行目と 4 行目を入れ替えるとよい。(3) は 2 5 行目から 1 行目を引けば $(5, 5, 5, 5, 5)$ のベクトルの定数倍が並んでいることが分かる。よって $\det = 0$ 。(4) は行 (もしくは列) 基本変形を繰り返す。

4. (i) $\det A = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$, $\det W = -3\sqrt{3}i$

(ii) ω は 1 の三乗根であることに注意すると, 例えば AW の 2 列目は

$$\begin{pmatrix} a + b\omega + c\omega^2 \\ c + a\omega + b\omega^2 \\ b + c\omega^2 + a\omega \end{pmatrix} = (a + b\omega + c\omega^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

となる。行列式は 1 次同次なので,

$$\det(AW) = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega) \det(W)$$

となる。あとは行列式の積公式を使えば, $\det(W) \neq 0$ であるので, 与式を得る。

線形代数学・同演習 A

演習問題 11

- 1.* $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, $B = (b_{ij}) = (b_1, \dots, b_n)$ のように表す . また , $AB = (c_{ij}) = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ とおく . さて , $AB = (Ab_1, \dots, Ab_n)$ であるので , $\mathbf{c}_j = Ab_j = \sum_{i_j=1}^n b_{i_j j} \mathbf{a}_{i_j}$ とかける . よって

$$\det(AB) = \det(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})$$

である . ここで , $\det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})$ は i_1, i_2, \dots, i_n がすべて異なるとき以外は 0 になるので , \det が 0 にならずに残る場合は , i_k は置換 $\sigma \in S_n$ を用いて $i_k = \sigma(k)$ と表されることができるところに注意する . これより

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)})$$

であるが , $\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \det(A)$ なので ,

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \cdot \det(A) = \det(A) \det({}^t B)$$

を得る . $\det({}^t B) = \det B$ であるので , $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ となる .

- 2.† (1) 2 (2) 8 (3) 20 (4) -1 (5) 2 (6) 6 (7) 7 (8) 24 (9) -9
3.† (a) 右辺を計算すれば左辺になる .
(b) 行列式の積公式と (a) を用いる .
4. (1) $i = 1, \dots, n$ に対して , $n+i$ 行の λ 倍を i 行目に加える行基本変形を行えばよい .
(2) はじめに (1) の結果は列に関しても成り立つことに注意する .

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & (B+A) - (A+B) \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|. \end{aligned}$$

- 5.* まず n が奇数のとき . このときは行列式の性質から

$$\det(X) = \det(-{}^t X) = (-1)^n \det({}^t X) = -\det(X)$$

なので, $\det(X) = 0$ となることが分かる. さて, $n = 2p$ (偶数) のとき. このときは, 問題 3 を用いると計算が楽である (単純に基本変形を用いても同様にできる). X を n 次の交代行列とし, それを

$$X = \begin{pmatrix} aJ & {}^tB \\ B & Y \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} B \text{ は } (n-2) \times 2 \text{ 行列} \\ Y \text{ は } n-2 \text{ 次の交代行列} \end{cases}$$

のようにブロック分割する. $n = 2$ ならば交代行列 X は $X = aJ$ の形であり, このとき $\det(X) = a^2$ なので確かに (多項式)² の形をしている. ここで $J^{-1} = {}^tJ = -J$ であることに注意しよう. さて, 問題 3 より

$$\det X = \det(aJ) \det(Y - B(aJ)^{-1} {}^tB) = a^{2-2p} \det(aY - BJ {}^tB) \quad (n = 2p)$$

となる. $Z := aY - BJ {}^tB$ とおけば, Z は交代行列となるため, 帰納法の仮定より $\det(Z) = \text{Pf}'(Z)^2$ となる多項式 $\text{Pf}'(Z)$ がある. これを用いれば,

$$\det(X) = (a^{1-p} \text{Pf}'(Z))^2$$

であるため, あとは $\text{Pf}(X) := a^{1-p} \text{Pf}'(Z)$ が多項式であることを示せばよい. ここで左辺 ($= \det(X)$) は当然多項式である. 一方で, $\text{Pf}(X)$ がもし多項式関数ではない有理関数^{*1} ならば, その自乗も多項式関数ではない有理関数になっているはずである. これが多項式と等しいということなので, $\text{Pf}(X)$ 自体が多項式でなければならない.

$$6.^\dagger \quad \text{Pf}(A) = af - be + cd.$$

^{*1} 有理関数とは, 二つの多項式 $f(x), g(x)$ を用いて $\frac{f(x)}{g(x)}$ と表わされる関数のこと.

線形代数学・同演習 A

演習問題 12

1.† (1) $(-1)^{n(n-1)/2}$ (2) $1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \frac{1-x^{2n+2}}{1-x^2}$ (3) $\lambda c_1 \cdots c_{n-1} - \sum_{i=1}^n a_i b_i \frac{c_1 \cdots c_{n-1}}{c_i}$ (4) $x_1 \cdots x_n \left(1 + \sum_{i=1}^n \frac{i}{x_i}\right)$

(1) 帰納法を用いると楽．与えられた n 次の行列を J_n と書けば，第 1 行に関する余因子展開より $\det J_n = (-1)^{n+1} \det J_{n-1} = (-1)^{n-1} \det J_{n-1}$ これと $\det J_1 = 1$ より分かる．(2) 与えられた n 次正方行列を A_n とおく．まず $\det A_1 = x^2 + 1$ ， $\det A_2 = x^4 + x^2 + 1$ であることが分かる．さて， $n \geq 3$ のとき A_n の第 1 行に関して余因子展開をすれば， $\det A_n = (x^2 + 1) \det A_{n-1} + x \det a_{n-2}$ となることが分かる．あとは $n = 1, 2$ のときの場合から $\det A_n = \sum_{k=0}^n x^{2k}$ と推測して帰納法を用いるか，あるいはこの漸化式を直接解く．(3) 第 n 行に関して余因子展開し，帰納法を用いる．或いは演習問題 11 の 3 (b) を使ってもできる．(4) まず第 1 行をピボットとして，他の行を掃き出す．すると，ちょうど問題 (3) の形になっているので，あとは問題 (3) の結果を利用すればよい．

2.† (1) $(x, y, z) = \frac{1}{2}(-13, -14, 1)$ (2) $(x, y, z) = \frac{1}{4}(-7, 9, -7)$

3. (1) $3x + 3y + z = -4$ (2) $4x - 3y + 3z = -11$

4. (1) 与えられた方程式は $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ の形であり，三点が同一直線上にないという仮定から $a \neq 0$ となるため，この方程式は円を表すことが分かる．また， $(x, y) = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とすれば行列式の性質から左辺は 0 になるので，この円は三点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) を通っていることが分かる．

(2) (a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $(x - 7)^2 + y^2 = 5^2$ (c) $(x - 4)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{5})^2$ (d) $(x + \frac{11}{2})^2 + (y + \frac{9}{2})^2 = (\frac{5\sqrt{10}}{2})^2$

(3) 三点が同一直線上にあるとき，(1) の記号を用いれば $a = 0$ ということになる．このときには方程式は $bx + cy + d = 0$ となり，これは直線になる (或いは，もっと退化して情報を何も持たなくなってしまう可能性もある) ．

線形代数学・同演習 A

演習問題 13

1. 余因子行列を \tilde{A} , 逆行列を A^{-1} とする.

$$(1) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & -12 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(2) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -18 & -11 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -18 & -11 \end{pmatrix}$$

$$(3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -11 \\ -13 & 7 & 22 \\ -9 & 4 & 11 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -11 \\ -13 & 7 & 22 \\ -9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

2. まず $\det(A) \neq 0$ とする. このとき, $A\tilde{A} = (\det A)E_n$ の両辺の \det をとれば, 行列式の積公式より

$$\det(A) \det(\tilde{A}) = \det(|A|E_n) = (\det(A))^n$$

であるので, $\det(\tilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$. 次に, $\det(A) = 0$ とする. $A = O$ ならば明らかなので $A \neq O$ とする. このとき, もし $\det(\tilde{A}) \neq 0$ ならば, \tilde{A} は逆行列 B を持つことになるが, $A\tilde{A} = 0E_n = O$ の両辺に右から B をかけると $A = O$ となってしまう. よって $\det(\tilde{A}) = 0$ となる.

3. (1) $\det A = 2a - 7$ (2) $a = 3, 4$

- 4.* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ (a, b, c, d は整数) とする. このとき $|A| = ad - bc$ は整数である. さて, A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるので, この成分が全て整数であるとするとき,

$$\frac{a}{|A|}, \quad \frac{b}{|A|}, \quad \frac{c}{|A|}, \quad \frac{d}{|A|}$$

がすべて整数になっていることになる. したがって,

$$a = a'|A|, \quad b = b'|A|, \quad c = c'|A|, \quad d = d'|A|$$

となる整数 a', b', c', d' が存在することになる．このとき $|A| = ad - bc = |A|^2(a'd' - b'c')$ であるので，

$$a'd' - b'c' = \frac{1}{|A|}$$

となる．ここで左辺は整数の和と積なので整数であるが，右辺は $|A| \neq \pm 1$ ならば整数になり得ない．したがって， $|A| = \pm 1$ でなければならない．

- 5.* $\alpha = \max_{i,j} |a_{ij}|$ とおく (A の成分の中で絶対値が最も大きいもの)．さて，すべての成分が 1 である $n \times n$ 行列を I と書くと， $I^k = n^k I$ となる．これを用いると，行列 X の (i, j) 成分を $(X)_{ij}$ と書くことにすれば，

$$|(A^k)_{ij}| \leq |((\alpha I)^k)_{ij}| = (n\alpha)^k$$

となる．ここで $|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)|$ ($M > N$) を考える．

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| = \left| \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{k!} (A^k)_{ij} \right| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{k!} |(A^k)_{ij}| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{(n\alpha)^k}{k!}$$

であり，指数関数 $e^x = \sum_k \frac{x^k}{k!}$ は収束するので， $M, N \rightarrow \infty$ のとき $|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| \rightarrow 0$ となる．つまり各 (i, j) について $x_{ij}(N)$ は Cauchy 列である．Cauchy 列は収束するので， $\{x_{ij}(N)\}$ は収束列である．

6.* (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(3) $n = 2k$ のとき， $(-1)^k E_2$ ， $n = 2k + 1$ のとき， $(-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ．

(4) $A^3 = A$ に注意して， $A^n = E_2$ ($n = 3k$)， $A^n = A$ ($n = 3k + 1$)， $A^n = A^2 = -A - E$ ($n = 3k + 2$)．

(5) $n = 1$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $n = 2$ のとき $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $n \geq 3$ のとき O ．

7.* (1) $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

(4) $-2e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t + \frac{2\pi}{3}) & -\sqrt{3}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) \\ \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\sqrt{3}}{2}t) & \cos(\frac{\sqrt{3}}{2}t - \frac{2\pi}{3}) \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- 8.* $\det(\exp(tA)) = e^{t \operatorname{tr} A}$ という関係が成立する．これは， $A = PDP^{-1}$ と対角化^{*1}と

^{*1} 実際は Jordan 標準形まで考えないといけないが....

したとき ,

$$\exp(tA) = \sum_k \frac{t^k}{k!} (PD P^{-1})^k = P \sum_k \frac{t^k}{k!} D^k P^{-1} = P(\exp tD)P^{-1}$$

と , 対角行列 D の指数写像の共役 (P と P^{-1} で挟んだ形) になることからわかる . 実際 , D を対角に d_1, \dots, d_n が並んでいるとすると , $\exp(tD)$ は対角に $e^{td_1}, \dots, e^{td_n}$ が並んでおり ,

$$\det \exp(tA) = \det P \exp(tD) P^{-1} = \det \exp(tD) = \prod_j (e^{td_j}) = e^{\sum_j td_j}.$$

ここで $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$ であることを思い出せば , $\det(\exp(tA)) = e^{t \operatorname{tr} A}$ という関係が得られる .