

線形代数学・同演習 A

4月11日分 質問への回答

質問 予習復習はどれくらい必要ですか．

- 各人によって異なると思いますので一概には言えませんが，毎週配布する演習問題の無印および†印の問題を解けるようになることが目安です．これらの問題が難しいと感じるようならば，予習・復習の時間を増やす等をすべきです．

質問 行列を学習するのは始めてで、乗法を理解するのがむずかしかったです。

質問 かけ算が複雑に定義されていてややこしいと思った。

質問 積がむずかしいです。

質問 ・積のやり方がちょっとややこしい

質問 **行列の積が難しい**

- 乗法の定義は加法に比べると複雑ですが，これにはちゃんと意味があり，実はとても「自然な」積なのです．ただ初回にその理由の説明をすると新しい概念が多くなりすぎてしまうので，後日改めて説明するという形を取りました．予定では第7回の講義で解説することになっているので，その時を楽しみにしててください．

質問 板書が速い．

質問 早いです。

- よく言われるのですが，内容が多いのでどうしても速くなってしまいます．

質問 友達に聞けて分かってよかったです

- 人と相談するというのも勉強する上で大事な方法の一つです．

質問 むずかしかった．はやくすすんだ．

質問

ムズい

質問 大変難しかったです。

- 今まで触れていない概念は難しく感じるものです．行列は大学での数学において基本的なもののなので，使いこなせるようになりましょう．

質問 かけ算を演習で確認したかったです．

質問 講義中の演習をていねいに量を多くしてほしいです

- 高校のときとは違い，講義中に演習の時間はあまり取れません．講義の終わりに行っている小テストがその代わりですので，ご了承ください．なるべく小テストの時間は確保するように努力しますが，短くなってしまう場合もあります．

質問 積の計算に少し自信がないので，問題をこなして身につけたい．

質問 かけ算は慣れるまで時間がかかりそう。

- 配布している演習問題や教科書に載っている問題を活用しましょう．配布問題の解答は，一週間後に HP にて用意する予定です．

質問 進度のはやさについていけるように頑張ります．

- 板書が多くて大変かもしれません．電子機器等もうまく活用してください．

質問 これから頑張る！

- がんばってください！

質問 進むのが速いので考える時間が少なく難しかった。

- もう少し時間を掛けたいところなのですが，そうすると間に合わなくなってしまうので，申し訳ありませんがこのペースで進ませてください．

質問 特にありません。

— はい．

質問 分かりやすかった。

— ありがとうございます。

質問 略記号や $:=$ の説明が入ったり，そもそも授業の教え方がとてもわかりやすかったり，今後とも受けたくなる授業でした。

— そう言っていただけると嬉しいです．記号に関しても，初めて使う記号はちゃんと説明を入れるつもりですが，うっかり忘れてしまうこともあるかと思いますので，気がついたら指摘してくださると助かります．

質問 完全に新しいがいねんで，おどろいた。

— 行列は「数を長方形に並べた」だけのものですが，数学や物理などでは驚くほど行列が出てきます．大学での数学においては非常に基本的なものになるので，使いこなせるようになりましょう．

質問 導入部の丁寧な解説，ありがとうございました．

— 理解の助けになったのなら幸いです．

質問 行列の基礎的な部分がよく分かりました。

— それはよかったです．

質問 行列の方程式が連立方程式に応用できるのは興味深いと思いました。

— 行列を使うと，連立一次方程式の解法を非常に綺麗に説明できます．楽しみにしててください．

質問 慣れてないせいか授業が速く感じた．

— 少しずつ慣れていきましょう．

質問 応用が楽しみ

— はじめに出てくる応用は，講義でも述べた連立一次方程式です．第 3 回から第 5 回にかけて解説する予定なので楽しみにしててください．

質問 行列の定義が理解できた

— それはよかったです．次はどのように使われるのかを理解しましょう．

質問 始めて行列に触れ，連立一次方程式を解くツールとして利用できることがわかり，新たな視点を得た．今後は別の行列の活用法も知りたい．

— 行列は，驚くほど多様な応用があります．その全ては講義中ではとても触れられませんが，その基礎となる知識を紹介していきます．

質問 これから，もっと難しくなってくると思うので，次回からも楽しみです！

— 難しくなるのが楽しみとは頼もしいですね．

質問 講義は分かりやすく，板書速度も適当でした．

— ありがとうございます．板書速度が適当と言われたのは初めてです。

質問 速く計算に慣れていこうと思います。

— 演習問題も活用してください．

質問 まだ慣れないです…。

— まだ初日ですので慣れないのも仕方ありません．時間はありますので少しずつ慣れていってください．

線形代数学・同演習 A

4月18日分 質問への回答

質問 \det は楽しいです．

— それは良かったです．前期の後半にももう少しサイズが大きい行列の行列式も出てきますので，乞うご期待です．

質問 特になし

— はい。

質問 講義では $\det A \neq 0$ ならば正則で (以下略) とだけ言っていたので， $\det A = 0$ のときについても言及してほしい。

— 確かにその通りです．申し訳ありませんでした．ちなみに， $\det A = 0$ のときは正則にならない，です．

質問 わからない。

質問 理解不能

質問 難しかったです．

— 今日の内容は，まとめると「行列の中でも正方行列が特に重要で，このときには逆行列というものを考えられる．逆行列を持つ行列を正方行列と呼ぶ．また，行列を分割して，ブロック行列の形で扱うこともある」でしょうか．次回から連立一次方程式の解法に入りますので，そこからが本番です．

質問 行列には様々な用語があり、覚えるのが大変そうだった。

— 使っていくうちに覚えていくものです．正則行列と逆行列は特によく出てくるので，まずはこれらから覚えましょう．

質問 行列式の意味がよくわからずかなりつまづきました

— 「逆行列を持つかの判定の際に現れる量」です．行列式については，前期の後半の主テーマですので，そのときに改めて説明します．今は「行列には行列式という重要な概念がある」という認識で十分です．

質問 転置行列や逆行列のところは

復習しておきたいと思う

質問 覚えることが多いので復習もしっかり行います。

— 逆行列，正則行列はしっかりと抑えておいてください．

質問 新しくでてきた行列の知識がよくわかりました。

— 逆行列と正則行列はとても大事です．

質問 単位行列は対角行列の一例ということで合っていますか？

— その通りです．対角行列の説明のところで例として挙げておくべきでした．

質問 覚える用語がたくさんあるので、くり返し問題を解いて覚える．

— はい．特に逆行列，正則行列はしっかりと抑えておいてください．

質問 逆行列などの重要な行列を理解した

— 正則行列・逆行列は大事です．

質問 行列 A の行列式の表記を $\det A$ ではなく， $|A|$ と書いてもいいですか？

— もちろんです．講義でもその記号を用いる予定です．ただ混乱の恐れがあるため，現段階での導入はしませんでした．

質問 いろいろ楽しい

— それは良かったです．

質問 逆行列や単位行列がどのように機能していくか楽しみです

— 乞うご期待です．

質問 未だ，行列がどのように役立つのか，現時点で何に取り組んでいるか，不明瞭なので，早く知りたいです．

— 今日までは準備でしたので、仕方ありません。次回から行列の連立一次方程式への応用をやります。

質問 テキストには写像がでてきていたのですが、されないのですか？

— 写像はもう少しあとになってからにします。今は行列に絞って話すほうがよいかと思ひまして。

質問 行列ではいろいろな定義・言葉・命題が出てきて覚えるのが大変だと思いました。

— 使っていくうちに覚えていけば良いです。まずは、逆行列と正則行列を抑えておきましょう。

質問 特になし。

— はい。

質問 3次正方行列の逆行列はどのように考えますか？

— 3次正方行列が逆行列を持つかどうかを判定できる量になるべきですが、詳しくは前期の後半にやりますので、楽しみにしてください。

質問 正方行列の種類に分かりやすい名前がついているので、覚えやすいと感じた。

— そうですね。この講義で紹介できるかどうかは分かりませんが、ここで紹介した行列は色々なところで活躍しています。

線形代数学・同演習 A

4月25日分 質問への回答

質問 計算の途中を間違いそうなので気をつけたいです。

- 一つ一つの計算は易しくても、数が多いので、計算ミスがどうしても起こってしまいます。字を丁寧に書いた
り検算をしたりして、計算ミスがなるべく起きないように心掛けましょう。

質問 わからない。

- 本日の講義の内容は連立一次方程式を行列に書き換えて解く手法についてです。今のところは従来の方法とさ
ほど変わりませんが、変数や方程式の数が増えてくると行列で解くほうがよい、ということを次週やります。

質問 普段、何気なく解いていた連立一次方程式が行列であることが興味深かったです。行の基本変形が正則行列をかけ
ることと理解することのイミを知りたいです。

- 正則行列は逆行列を持つ行列であったので、基本変形を行っても元の行列の情報を損なうことがないというこ
とがわかります。次回導入する‘簡約化した行列’も元の行列に適切な正則行列をかけることにより得られると
いうことが分かっていると後々で理解の助けになります。

質問 連立一次方程式を行列という形で解けることができました。

- 次回はもっと一般の連立一次方程式を解けるようになります。

質問 行列のイメージが少しわかった

- それは良かったです。

質問 どうでもいいですけど、①, ②, ③ って、式 ①, ②, ③ という意味ではなく、行 ①, ②, ③ という意味で使って
いますか。

- 指摘してくださってありがとうございます。その通りです。一言ちゃんと言っておくべきでした。

質問 しっかり復習したい。

- 行列の基本変形は、前期後期ともに基本的な操作になりますので、しっかりと身に付けておいてください。

質問 普通に連立一次を解くのと速度は大差ないと思った。もっと式や変数が多くなると行列じゃないとダメになる
のかもしれないと思った。

質問 最初のうちは普通に計算した方が早いかなと思った。

質問 行列使わない方が 絶対速い。

質問 未だ練習不足なので普通にといったほうが早いと思いました。

- 変数の個数と式の本数が多くなってくると、基本変形のほうがよいです。というのも、機械的な計算で確実に
解を得ることができるからです。これは、変数の個数や方程式の本数が非常に多い連立一次方程式でも、計算
機により高速に解を得ることができるということで、広く応用されています。

質問 予習ではイマイチ解法がわからなかったが講義で分かりやすく教えていただいて理解できた。

- それは良かったです。基本変形は今度もずっと出てくる、線形代数の講義において重要な技術なので、自由に
使いこなせるようになりましょう。

質問 特になし

- はい。

線形代数学・同演習 A

5月9日分 質問への回答

質問 なぜこれで解けるのか不思議です。というか分かりません…。

- 簡約化 (基本変形) は、拡大係数行列に左から正則行列を掛けることと対応していることを思い出してください。例えば連立一次方程式 $Ax = b$ に対して、拡大係数行列が $(A|b) \rightarrow (\tilde{A}|\tilde{b})$ のように簡約化されたとします。これは、ある正則行列 X を用いて

$$X(A|b) = (\tilde{A}|\tilde{b})$$

となることを意味しています (例えば小テストで扱った方程式で考えてみると良いでしょう)。さて、 $X(A|b) = (XA|Xb)$ であったことを思い出すと (行列のブロック分割)、 $XA = \tilde{A}$, $Xb = \tilde{b}$ ですが、この簡約化の操作というのは、元の方程式の世界においては

$$Ax = b \Leftrightarrow XAx = Xb \Leftrightarrow \tilde{A}x = \tilde{b}$$

という式変形と対応しています。ここで特に X は正則であるので、元の連立一次方程式 $Ax = b$ の解と簡約化して得られた連立一次方程式 $\tilde{A}x = \tilde{b}$ の解が一致することがわかります (正則ゆえ逆行列を持つので、それを掛ければ元の方程式に戻ることができる)。これが簡約化で連立一次方程式が解けることのカラクリです。

質問 未知数の数が式の数より大きいときも行列を用いて解けるのは面白いと思いました。

- これも行列に書き換えることの利点の一つですね。方程式をそのまま扱っていたのでは、どの変数をパラメータと思えばよいかはなかなか分かりません。行列に書き換えてしまえば機械的な計算をするだけでよいのです。

質問 (変数の数) - (主成分の数) = (自由度) として良いですか？

- そのようなイメージで良いです。後期には次元公式という形でしっかりと定式化します。

質問 ムズイヨ

質問 ムズイです

- 演習問題等を活用してマスターしましょう。

質問 簡約化がよくわからなかった。

- 要約すると、基本変形でなるべく簡単な形にしましょうということです。線形代数の講義ではずっと使いますので、できるようになりましょう。

質問 少しずつ行列が分かってきました。

- それはいいことです。まだ行列の一側面でしかないですが、行列は大量のデータを一括して扱えるので、いろいろな分野で使われています。

質問 パラメータ表示がよくわかりました。

- パラメータ表示は、一意的な表示ではないという点に欠点がありますが、非常に直感的で扱いやすいというメリットがあります。

質問 まだ基礎が曖昧だから難しい。計算ミスしがち。

質問 計算ミスが多い。落ち着いて計算したい。

- 一つ一つの計算は簡単なものですが、数が多いのでどうしても計算ミスが増えがちです。演習問題を利用しつつ、慣れていきましょう。ちなみに、講義で私自身間違えていたように、問題で与えられた方程式から行列に書き換える段階で間違えることも多いです。この点にも十分に気をつけましょう。

質問 GW でところどころ忘れていたが思い出せてやれてよかった！

- それは良かったです。でも GW でそれだと、後期 (夏休み後) が不安になりますね。

質問 特になし

- はい。

線形代数学・同演習 A

5月16日分 質問への回答

質問 難しかった

— 簡約化すれば連立一次方程式が必ず解ける（解を持たないことも判定できる）ということを理解してください．

質問 行列を使えば方程式の解が存在するかないかがわかるのは便利だと思いました。

— 行列はプログラミングと非常に相性が良いので，変数や式の数が何百などになっても解くことができます．

質問 計算ミスが多いので演習量を増やしたい。ようやく，正則行列の意義が見えてきた。

— 連立一次方程式の解の構造が検算に利用できますので，これも活用して計算ミスをなるべく減らしましょう．

n 次正方行列の中で，正則行列全体の集合は一般線形群と呼ばれていて，非常に重要な集合です．変換としての行列を考えると，その意義をより深く理解できます．

質問 分かった

— 本当ですか？

線形代数学・同演習 A

5 月 23 日分 質問への回答

質問 外積を用いた上の求め方^{*1}の方が楽に見えるのですが...

- 法線ベクトルの幾何学的な意味 (平面と直交している) を紹介できなかったのも、講義では使えませんでした。もちろん、その方法で解いても構いません。後ほど行列式を使った綺麗な公式も紹介します。

質問 高校のときベクトルが好きだったので楽しかった。

- それは良かったです。本当はもう少し時間を取って色々やりたいですが、肝心の行列を疎かにするわけにはいけないので、泣く泣くこれだけに抑えました。

質問 教科書の何ページの内容をしているのか黒板に書いてほしい。

- なるべく書くようにはしますが、対応していないところもありますので、その点はご了承ください。ちなみに、講義用ページには書いています。

質問 ムズカッタ

- しっかりと復習しましょう。

質問 今日理解できた

今日の内容は比較的、理解し易かった。

- 本当ですか？

質問 特になし

- はい。

^{*1} $\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ であり、平面の法線ベクトルは $\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので、求める平面は $\begin{pmatrix} x-2 \\ y+1 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$, つまり $2x + 2y + z = 1$.

線形代数学・同演習 A

5 月 30 日分 質問への回答

質問 置換と写像は同じと考えていいのですか？

- 置換は写像の特別な例の一つですが，逆は成り立たないので，それはよくないです．置換とは，有限集合 S 上の自己同型群，すなわち S から S への写像であって，しかも 1 対 1 であるものを指します．これは写像の中の非常に特殊なものです．

質問 授業の途中がよくわからなかった。

- もう少し具体的に指摘してくださると助かります．

質問 この小テストはなんとなく分かったけど写像の入りのところはよく分からなかった．

- 写像の入り...写像の定義のところでしょうか．今まで扱ってきた関数は実数 x に対して実数 $f(x)$ を対応させるものであって，多変数関数とはベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対して実数 $f(x)$ を対応させるものです．そして，今日定義した写像はベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ に対してベクトル $\varphi(x) \in \mathbb{R}^m$ を対応させる，というだけのことです．

質問 高校のときあいまいだった写像が少しわかりました．

- それはよかったです．写像（関数）は，物理学において非常に重要な役割を果たしています．早いうちに写像という概念に慣れておくといいでしょう．

質問 覚えることが多いのがんばりたい。

- 他の講義もあって大変でしょうが，がんばりましょう．

質問 無理です．

- がんばってください．

質問 特になし

- はい．

補足．講義中，板書で

$$\varphi(x) = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書きました．ここで二番目の等号が不自然だという指摘がありました（行列の積を知らなければできない，という点で）．後で見直してみたところ，どうやら式を一つ飛ばしていたようです：

$$\varphi(x) = x \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}.$$

写像（関数）は [作用素] (変数) のような形で書くことが普通なので（例えば関数 $f(x)$ など）， $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ において無理やり変数 x, y を右側に持ってきて

$$\boxed{} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と書こうとすると， $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ が一番理に適った書き方である，というのが私の個人的な見解です．

線形代数学・同演習 A

6 月 13 日分 質問への回答

質問 2 行 (列) 以上 , [つまり 3,4 行でも] 同じ数の行 (列) があれば行列式は 0 ということ?sgn の読み方はなんですか?

- その通りです . 正確には , 行列を列ベクトルの集まりと思ったときに , 同じ方向を持つベクトルが 2 本以上あるときは常に $\det = 0$ になります . sgn は英語の sign もしくはラテン語系の signum の略で , サインもしくはシグナムとよみます . 私はサインと呼んでいます .

質問 覚え方があってよかった。

- 2 次 , 3 次ときにはこの計算方法で計算出来ますが , 4 次以降になると出来ないということを覚えておいてください .

質問 行列式の意味がなんとなく分かった

- それはよかったです . 教科書の定義から入ると意味をつかみにくいと思い , 幾何学的方法で導入することにしました .

質問 中間が小テストレベルだと思ってナメてました。ちゃんと勉強します！！

- それだとわざわざ講義の貴重な 1 コマを使って試験を実施する意味がないでしょう .

線形代数学・同演習 A

6 月 20 日分 質問への回答

質問 ややっこしいが

- この日紹介した行列式の公式のまま計算すると指摘の通りややっこしいですが，次回小さいサイズの行列式を計算する手法を紹介します．その手法を正当化するためにはこの公式が必要です．

質問 写像のイメージがまだよくわからない。

- 一番わかりやすい理解は，関数の一般化です．関数は与えられた実数に対して実数を一つ対応させるというものですが，集合 X から Y への写像は，与えられた X の要素に対して Y の要素を一つ対応させるというものです．多くの例に触れて少しずつ慣れていけばよいです．

質問 難しい．

質問 ムズイ。

- 初めて触れる概念なので難しく感じるかもしれませんが，諦めずに習得してください．

線形代数学・同演習 A

6月27日分 質問への回答

質問 基本変形がよく分かりません。

- 以前のノートあるいは教科書（〔斎藤〕では p.48,〔三宅〕では p.23）をよく見直して、復習しておいてください。

質問 基本変形で引くときに下を「1」にする理由がよく分からなかった。上の方を「1」にしたらだめなのか。

- 説明不足でした。例えば次の行列

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

に対して1行目をピボットに選択して基本変形を施す際に、

$$A \xrightarrow{(2 \text{ 行目}) - (1 \text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|l} 1 & -1 & -1 & (2 \text{ 行目}) \\ -) & 1 & 1 & 1 \quad (1 \text{ 行目}) \\ \hline & 0 & -2 & -2 \end{array}$$

のように計算してくださいという意味でした。下に持ってきて云々というのは、上式の右の筆算を念頭に置いたものです。ここで引く順番を逆にすると

$$A \xrightarrow{(1 \text{ 行目}) - (2 \text{ 行目})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{ccc|l} 1 & 1 & 1 & (1 \text{ 行目}) \\ -) & 1 & -1 & -1 \quad (2 \text{ 行目}) \\ \hline & 0 & 2 & 2 \end{array}$$

となって、行列式の符号が違ってきてしまいます。簡約化の際にはどちらで変形しても問題ないのですが、行列式の場合は符号が変わってしまうので気をつけなければならないポイントです。

質問 これまでサイトにアップロードされていたノートをまとめて閲覧することはできないでしょうか

- 忘れていました。この更新に合わせて見られるようにしておきます。

質問 固有値と固有ベクトルの有用性について教えてください。

- 固有値・固有ベクトルは正方行列に付随して定義されるものです。一般に、 n 次正方行列は、数ベクトル空間 \mathbb{R}^n からそれ自身への（線形）写像と対応しています*2。線形写像（つまり行列）を固定して数ベクトル空間を調べるとき、この写像に応じて扱いやすい‘基底’*3を取れば見通しよく計算できるようになります。その扱いやすい基底を与えるのが固有ベクトルであって、固有値はその座標軸方向に対する拡大率を表します。したがって、例えば2次正方行列 A は（殆どの場合）固有値 λ_j と対応する固有ベクトル v_j ($j = 1, 2$) を用いて

$$A = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad P = (v_1, v_2)$$

と書くことができます。一旦こう書いてしまえば、 A の冪乗 A^n や指数写像 $\exp A$ などは簡単に計算ができるようになります。また、写像の基底に依らない概念（例えば行列式や階数など）は、先述の扱いやすい基底を考えることで、固有値を調べれば決定できることがわかります。つまり、固有値は写像（行列）の持つ重要な情報をすべて含んでいるのです。以上の説明は、後期に扱うベクトル空間の知識があるとより深く理解できるようになります。

*2 あるいは \mathbb{C}^n 。

*3 基底とは座標軸を一般化したものです。

線形代数学・同演習 A

7月4日分 質問への回答

質問 今日はいつもよりも理解し易かった。

— 行列の積公式，余因子展開はいずれも重要ですので，是非使いこなせるようになりましょう。

線形代数学・同演習 A

7 月 18 日分 質問への回答

質問 小テストの時間を長くしてほしい

— 10 分から 15 分程度を取れるようにはしています．これ以上は少し難しいです．

質問 ムズイ

難しい

— n 次行列の行列式は間違いやすいので，いつもよりも丁寧に計算するように心掛けましょう．

線形代数学・同演習 A

7月25日分 質問への回答

(小テスト欄での質問がなかったので、講義後に受けた質問を載せています)

質問 演習問題 10 の大問 2 の解答が間違っているのではないか？

— 検算してみたところ、間違っていないようです。もし演習問題の解答で間違っているもしくはわからない所があれば、メールでお知らせください。できるだけ早く対応したいと思います。

質問 演習問題 8 の大問 8 の解答がわからない。

— 少し説明不足でした。 $(x, y, z) := (x|y \times z)$ という定義ですが、内積・外積の公式から

$$(x|y) = (y|x), \quad x \times y = -y \times x, \quad (x|y \times z) = (x \times y|z)$$

が成り立つので、例えば

$$(x, y, z) = (z, x, y) = (y, z, x) = -(x, z, y) = -(z, y, x) = -(y, x, z)$$

などが成り立ちます。これを使って計算していくわけです。因みに、行列式を使えば $\det(x, y, z) = (x, y, z)$ であるので、余因子展開を用いると

$$V = \frac{1}{6} \text{Abs} \left\{ \det \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 1 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & c_1 & c_2 & c_3 \\ 1 & d_1 & d_2 & d_3 \end{pmatrix} \right\}$$

と書けます。ここで Abs は絶対値の記号と同じものです。行列式の略記号と紛らわしいので、ここではこの記号を使っています。