

線形代数学・同演習 A

演習問題 1

1. 次の行列の演算を計算せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(6) \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の積を計算せよ．ただし， a, b, θ_1, θ_2 は任意の実数である．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

3.[†] 実数 a, b, c, d に対して，次の等式を確認せよ．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 次の等号が成り立つように， x, y, u, v の値を定めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ u-1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

5.[†] $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ であるとき，次の式を計算せよ．^{*1}

$$(1) A + B \quad (2) A - B \quad (3) AB \quad (4) BA \quad (5) A^2 \quad (6) B^2 \quad (7) (A + B)(A - B)$$

6. 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ と $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ において， P は逆行列 P^{-1} を持つとする． $B = P^{-1}AP$ とするとき， $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となるように実数 x, a, b の値を定めよ．

4 月 11 日分 (凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，^{*} は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} (3) と (4) から $AB \neq BA$ となることが分かる．さらに，(5) ~ (7) より $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$ であることも確認できる．このように，行列での演算は実数のときと同じ感覚で行うと計算間違いをしてしまう．

線形代数学・同演習 A

演習問題 2

1.† 2 次正方行列 A, B に対して, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを証明せよ.

2.† $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して, 次の恒等式が成り立つことを示せ*¹.

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = O.$$

3. 行列のブロック分割を利用して次の行列の積を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & -8 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列に逆行列があれば, それを求めよ. ただし, θ は任意の実数とする.

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

5. 次の行列が正則行列となるための a の条件を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 3 & a \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2a & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1+a^2 \end{pmatrix}$$

6. 2 次一般の対角行列は $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) のように書くことができる. 2 次一般

の上三角行列, 下三角行列, 対称行列および交代行列をそれぞれ同様に表せ.

7. 3 次の対角行列, 上三角行列, 下三角行列, 対称行列および交代行列についてもそれぞれ同様に表せ.

8.† 2 次正則行列で $A^{-1} = {}^tA$ をみたすものを求めよ.

9. 2 本のベクトル $x = {}^t(1, 0, 1)$, $y = {}^t(2, -1, -2)$ に対して, 次の二つの積を計算せよ.

$$(1) {}^txy \quad (2) x {}^ty$$

10.† 次の条件を満たす 2 次正方行列 A は存在するか.

$$(1) A \neq O \text{ であるが } A^2 = O \quad (2) A^2 = E_3 \text{ かつ } A^3 = O$$

$$(3) A \neq E_2, O \text{ かつ } A^2 = A$$

4 月 18 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*¹ Cayley-Hamilton の定理と呼ばれている.

線形代数学・同演習 A

演習問題 3

1. 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \quad \begin{cases} 3x & -z = 1 \\ -2x + 2y & = 3 \\ -5x + y + z & = -2 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 2x + 2y + z & = -2 \\ x + y + z & = 1 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 4x + 5y + 8z = 5 \\ -4x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x - 4y + z = -6 \\ 5x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases}$$

$$(5) \quad \begin{cases} x - y - 4z = -17 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases}$$

$$(6) \quad \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$(7)^{\dagger} \quad \begin{cases} x & + w = -1 \\ x + y + z & = -2 \\ 2x & + 4w = 0 \\ y & + w = 3 \end{cases}$$

$$(8)^{\dagger} \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 5x + 5y + 6z + 7w = -1 \\ 8x + 5y + 6z + 5w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 2w = 5 \end{cases}$$

$$(9)^{*} \quad \begin{cases} x + 2y & - 4w + 7u = -1 \\ 3x - 2y + z - 2w + 4u = 2 \\ 2x - 2y + z & + 4u = -4 \\ 2x - 6y + z + 5w + 7u = -2 \\ x + y & - 3w + 3u = 0 \end{cases}$$

$$(10)^{*} \quad \begin{cases} x + 2y - 2z - 2w & = 3 \\ 3x + y + z + 4w + 2u = 4 \\ y + z + 3w + 5u = 4 \\ 5x & + 5z - w - 2u = -2 \\ x - y + z + w - u = -1 \end{cases}$$

2. 基本変形を与える 3 次行列 $Q_3(i; \lambda)$, $P_3(i, j)$, $R_3(i, j; \lambda)$ の逆行列を求めよ．

3. 次の行列は逆行列を持つか．持てばそれを求めよ．^{*1}

$$(1) \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4.^{*} 次の連立一次方程式はいつ唯一の解を持つか．またそのときの解を求めよ．^{*2}

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

4 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題， \dagger は特に解いてほしい問題， $*$ は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 拡大行列 $(A|E_3)$ に基本変形を施す．もし $(E_3|B)$ の形になれば A は逆行列 $A^{-1} = B$ を持つが，その形にしなければ逆行列を持たない．

^{*2} この連立一次方程式の係数行列は，Vandermonde (ヴァンデルモンド) 行列という名前がついている．

線形代数学・同演習 A

演習問題 4

1. 次の行列を簡約化し, その階数を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -3 & -1 & -1 \\ 3 & 5 & -7 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 & -6 \\ 3 & -5 & 16 & -29 & -5 \end{pmatrix}$$

2.[†] 次の行列を簡約化し, その階数を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 12 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

3.[†] 次の連立一次方程式を解け*¹.

$$(1) \begin{cases} x + 4y + 2z + 3w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + w = -2 \\ 3x + 2y + z + 4w = 3 \\ 4x + y + 3z + 2w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 3y - z + 2w = 3 \\ -x + 3y + 2z - 2w = 1 \\ -x + 3y + 4z - 2w = 9 \\ 2x - 6y - 5z + 4w = -6 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 2y + 5z - 2w = -12 \\ 3x + y + 8z - 2w = -4 \\ 4x + 5y + 7z + w = 13 \\ x + 5y - 2z - 2w = 16 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} y + 2z + 3w = 1 \\ -x + z + 3w = 1 \\ -2x - y + 3w = 1 \\ -3x - 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x + 3y + z - 8w = 3 \\ -2x - 5y - z + 13w = -4 \\ 3x + 8y + 2z - 21w = 0 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 4x - 11y - 7z = 2 \\ x - 9y - 8z = 4 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = -4 \\ 4x + 2y - z = -5 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x + y - 2z + w = -3 \\ 2x - y + 2z + 2w = -6 \\ 3x + 2y - 4z - 3w = 9 \end{cases}$$

4.* 行列 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 2 & b & 1 & c \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b+1 & a & 1 \end{pmatrix}$ の階数がちょうど 2 になるように, a, b, c の値を定めよ.

5 月 9 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*¹ 一部, 次週の講義内容分も混ざっています

線形代数学・同演習 A

演習問題 5

1. 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 5w = 0 \\ 2x + 4y + 7z + 11w = 0 \\ -x - 2y - 2z - w = 0 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} x + y - 2z + w = 0 \\ 2x - y + 2z + 2w = 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3w = 0 \end{cases}$$

2.[†] 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \quad \begin{cases} x - y + w = 2 \\ 3x + y + 4z + 3w = 2 \\ -4x + y - z - 4w = -7 \end{cases} \quad (2) \quad \begin{cases} 2x + 4y + z + 4w = 5 \\ x + 2y + 3z - 3w = 5 \\ 4x + 8y + 15z - 18w = 23 \end{cases}$$
$$(3) \quad \begin{cases} x + 3y - 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \\ 4x + 2y - z + 5w = 0 \\ -2x - y + z - 2w = 0 \end{cases} \quad (4) \quad \begin{cases} x + 3y + 2z - 4w = -1 \\ 3x - y - 3z - 2w = -8 \\ -2x + y + w = -6 \\ 2x - 2y - 3z = -5 \end{cases}$$

3.[†] 次の行列は正則かどうか調べよ．また正則ならば，その逆行列を求めよ．

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 7 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$
$$(4) \quad \begin{pmatrix} -3 & 7 & 12 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (5) \quad \begin{pmatrix} 3 & -9 & -20 \\ -4 & 12 & 21 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \\ 5 & -14 & -8 & -14 \end{pmatrix}$$

4.[†] 正方行列 A に対して，逆行列が存在すれば唯一であることを示せ．^{*1}

5. 二つの正則行列 A, B の和 $A + B$ はまた正則行列となるか．

6. 二つの正則行列 A, B の積 AB あるいは BA はまた正則行列となるか．

7.^{*} 与えられた整数係数の行列を簡約化するプログラムを作成せよ．^{*2}

5月16日分 (凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，^{*} は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} つまり， B, C が共に A の逆行列とすれば， $B = C$ となることを示す．

^{*2} 行列の基本変形はプログラミングと相性がよい．このことが連立一次方程式を拡大係数行列に置き換えて解く大きな理由である．プログラミングに興味がある方はぜひやってみてください．

線形代数学・同演習 A

演習問題 6

1. 平面 $P: ax + by + cz = d$ の法線ベクトルを \mathbf{a} とし, 平面 P 上の 1 点 \mathbf{x}_0 をとる. このとき, 平面 P 上の任意の点 \mathbf{x} に対して, $\langle \mathbf{a} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \rangle = 0$ が成り立つことを示せ.*¹
2. 次の 2 本のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} のなす角度 θ を求めよ ($\cos \theta$ を計算するだけでよい).

$$\begin{array}{ll} (1) \mathbf{x} = (1, 2), \mathbf{y} = (2, 1) & (2) \mathbf{x} = (1, -2, 3), \mathbf{y} = (2, -3, 1) \\ (3) \mathbf{x} = (1, 1, 1), \mathbf{y} = (-1, -2, 1) & (4) \mathbf{x} = (1, -1, 1), \mathbf{y} = (-1, 2, 3) \end{array}$$

3. 空間の点 $(1, 2, 3)$ を通り, 方向 $(0, 2, 1)$ を持つ直線の方程式を求めよ.
4. 空間の点 $(1, 0, 3)$ を通り, 法線ベクトル $(0, 2, 1)$ を持つ平面の方程式を求めよ.
5. 次の空間の三点を通る平面の方程式を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1) & (2) (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \\ (3) (2, -1, 3), (-1, 2, 1), (3, 1, -1) & (4) (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) \end{array}$$

6. l_1, l_2 を以下で与えられるような直線とすると, 次の平面の方程式を求めよ.

$$l_1: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad l_2: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(a) 点 $(1, -5, 4)$ を通り, 直線 l_1, l_2 に平行な平面*²,

(b) 直線 l_1 を含み, 直線 l_2 に平行な平面.

7. 原点と平面 $2x + y - 2z = 1$ との距離を求めよ.*³
8. 3 次元空間において, 原点 O と直線 $l: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ との距離を求めよ.*⁴
9. 次の空間内の 2 本のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して, その外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ を求めよ.*⁵

$$(1) \mathbf{x} = {}^t(2, 0, 0), \mathbf{y} = {}^t(0, 0, 4). \quad (2) \mathbf{x} = {}^t(1, 1, 1), \mathbf{y} = {}^t(1, -1, 0).$$

10. (1) 交代行列 X, Y に対して $[X, Y] := XY - YX$ とするとき, $[X, Y]$ もまた交代行列となることを示せ.

(2)* 3 次元空間の外積と 3 次交代行列との関係について考察せよ.

5 月 23 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*¹ $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ は平面 P に沿ったベクトルなので, これより平面 P の法線ベクトルとは“平面 P と直交しているベクトル”であることが分かる. \mathbb{R}^2 における直線の法線ベクトルも同様である.

*² 直線がある平面の法線ベクトルと直交する方向を持つとき, その平面と平行であるという.

*³ 原点と平面上の点との距離の最小値を求めよ, という問題. 実は, 法線ベクトル \mathbf{a} が関わってくる.

*⁴ 問題 8 と同様, 原点と直線上の点との距離の最小値を求めよ, という問題.

*⁵ 外積は行列式を用いて分かりやすく計算できることを後ほど紹介する.

線形代数学・同演習 A

演習問題 7

1. 一般の線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が与えられたとき, ある $m \times n$ 行列 A が存在して, $f(x) = Ax$ となることを示せ.
2. $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ を単位正方形, K を 4 点 $(0, 0), (1, 2), (0, 4), (-1, 2)$ を頂点とする菱形とする. このとき, D を K に写すような平面の線形写像をすべて決定せよ.
3. 単位正方形 D は, 次の 2 次正方行列によってどのような図形に変形するかを図示せよ. また, 変形後の図形の面積を計算せよ^{*1}.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

4. 二つの空間ベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3), \mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を考える. ただし, \mathbf{a}, \mathbf{b} は平行ではなく, どちらも 0 ではないとする.

(1) 原点 O を通り, 方向 \mathbf{a}, \mathbf{b} を持つ平面は次に表わされることを示せ:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0.$$

(2) $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle^2$ を示せ.

(3) $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta$ を示せ.

この問題 (1)–(3) より, 次を得る^{*2}:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

この結果を用いると, (2) の等式は $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - \langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle^2$ と書ける.

(4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ を示せ.

(5) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ を示せ^{*3} (Jacobi の恒等式).

5 月 30 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 行列式と比較してみよ.

^{*2} 法線ベクトルは平面と垂直なベクトルであるが, この平面は 2 つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を含むので, これら 2 つのベクトルと垂直になっている. よって $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はこの法線ベクトルのスカラー倍であるが, (2) よりそのスカラーは 1 で良いことが分かる. (実はまだ不十分で, 符号を確認しないといけない. これには“行列式”の概念が必要なので, ここでは深入りしない. ここに簡単に書いておくと, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の方向は $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$ となるように取っている.)

^{*3} 上の結果を用いて良い.

線形代数学・同演習 A

演習問題 8

1. 次の行列式を求めよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

2. 次の行列式を求めよ . ただし , a, b, c は任意の実数とする .

$$(1) \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$$

3. 次の行列式を求めよ . 答えはできるだけ因数分解をした形で求めること .^{*1}

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix}$$

4. ベクトル x, y が以下のベクトルであるとき , それらの外積 $x \times y$ を求めよ .

$$(1) \begin{cases} x = {}^t(2, 1, 3), \\ y = {}^t(-1, 2, -1) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = {}^t(1, 5, 2), \\ y = {}^t(-2, -3, 1) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = {}^t(3, -4, -1), \\ y = {}^t(-1, 2, 3) \end{cases}$$

5. 任意の数ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して , 次の不等式が常に成り立つことを示せ .

$$|\langle x | y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

6. 任意の 2 次正方行列 A に対して , 次の等式が成り立つことを示せ .

$$A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)E_2 = O.$$

ただし , tr は正方行列のトレースと呼ばれるもので , $A = (a_{ij})_{n \times n}$ のとき $\text{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$ である .

7. 任意の正方行列 A, B に対して , $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ は成り立つか . 成立するならば証明を , しないのならば反例を与えよ .

8. 同一平面上にない 4 点 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ を頂点に持つ四面体の体積を求めよ .

6 月 13 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , † は特に解いてほしい問題 , * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 後の講義で , より簡単な計算方法を紹介する .

線形代数学・同演習 A

演習問題 9

1. 4 次の置換群 S_4 の元をすべて記述し^{*1}，その中で偶置換であるものの個数を調べよ．
2. S_n の元の個数が $n!$ であることを証明せよ．
- 3.† σ, τ を次のような置換とするとき，積 $\sigma \circ \tau$ と積 $\tau \circ \sigma$ をそれぞれ計算せよ．

$$(1) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

- 4.† 次の置換の符号を求めよ．

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (b) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (c) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(d) (1\ 3\ 4)(4\ 1\ 5\ 2) \quad (e) (2\ 4\ 7)(2\ 5\ 4)(1\ 6\ 3\ 2) \quad (f) (1\ 5\ 4)(3\ 1\ 6\ 2)(1\ 5\ 4)$$

5. 置換の互換の積への分解は 1 通りではない．問題 4 に現れる置換でそれ確かめよ．またその分解に依らず，互換の偶奇は変わらないことも確かめよ．
6. σ を巡回置換 $(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ とするとき， $\sigma^r = \varepsilon$ (単位置換) となることを示せ．
7. 次で定義される置換 σ_n の符号を求めよ．

$$\sigma_n := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \downarrow \\ n & n-1 & \cdots & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

定義．複数の巡回置換に対して，それぞれの巡回域が共通の数を持たないとき，互いに素という．例えば， $(1\ 2)$ と $(3\ 4)$ は互いに素であるが， $(1\ 2)$ と $(1\ 3)$ は互いに素ではない．

8. σ, τ を互いに素な巡回置換とする．このとき， $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ を示せ．
- 9.† 次の置換を，互いに素な巡回置換の積として表わせ．

$$(a) (1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 2\ 3\ 6\ 7) \quad (b) (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(2\ 3\ 5\ 6) \\ (c) (1\ 3)(4\ 5)(3\ 6)(2\ 4) \quad (d) (1\ 2\ 4)(1\ 3\ 4\ 5)$$

6 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*1 巡回置換の長さ毎に調べると分類が楽である．

線形代数学・同演習 A

演習問題 10

1. 次の 3 次行列の行列式を計算せよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

2.[†] 次の正方行列の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & -5 \\ -4 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

3.[†] 次の行列の行列式を求めよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 1 & -3 & 6 & 0 & 0 \\ -4 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & 5 & -8 \\ -3 & 5 & 6 & 4 & -7 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & -5 & -10 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ -5 & 3 & 5 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ とする . ただし , $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である .

(i) $\det(A)$, $\det(W)$ を求めよ . また , $\det(W) \neq 0$ を確かめよ .

(ii) $\det(AW) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\det(W)$ を示し , 次の因数分解の結果を証明せよ^{*1} .

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$$

6 月 27 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , [†] は特に解いてほしい問題 , * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 行列式の積公式 (次回の講義で紹介する) を用いる .

線形代数学・同演習 A

演習問題 11

1.* 行列式の積公式 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を, 行列式の公式*¹を用いて証明せよ.

2.[†] 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} -3 & 4 & 4 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 7 & 5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} -6 & -9 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 1 & -7 & -29 & -22 \\ 0 & 5 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -7 & -5 \end{vmatrix} \quad (5) \begin{vmatrix} 0 & 3 & 6 & -5 \\ 1 & -3 & -8 & 6 \\ 0 & 2 & 5 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} 4 & -1 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} -7 & -7 & -7 & -9 \\ -6 & -6 & -5 & -5 \\ 6 & 7 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (8) \begin{vmatrix} 9 & -17 & 26 & -3 \\ 4 & -10 & 6 & -2 \\ -2 & 8 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{vmatrix} \quad (9) \begin{vmatrix} 5 & -5 & -2 & -5 \\ -4 & -7 & 2 & -8 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 4 & -2 & 5 \end{vmatrix}$$

3.[†] A, D を正方行列とし, 特に A は正則であるとする. このとき以下を示せ.

$$(a) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}.$$

$$(b) \det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D - CA^{-1}B).$$

4. A, B, C, D を n 次正方行列, λ を任意の実数とすると, 次が成り立つことを示せ.

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + \lambda C & B + \lambda D \\ C & D \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$$

5.* n 次の交代行列*² X について, n が奇数ならば $\det(X) = 0$, n が偶数ならばある多項式*³ $\text{Pf}(X)$ が存在して $\det(X) = (\text{Pf}(X))^2$ となることを示せ.

6.[†] 4 次交代行列 $X = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & -f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}$ のパフィアン $\text{Pf}(X)$ を求めよ.*⁴

7月4日分 (凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*¹ $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ のことです.

*² 交代行列とは, $X + {}^tX = O$ を満たす正方行列のことです.

*³ この多項式 $\text{Pf}(X)$ をパフィアン (Pfaffian) という.

*⁴ 符号は $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対して $\text{Pf}(J) = 1$ となるように決める. 問題 3 (b) を用いると計算が楽.

線形代数学・同演習 A

演習問題 12

1.† 次の n 次正方行列の行列式を計算せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} \lambda & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1+x_1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+x_2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+x_3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+x_n \end{pmatrix}$$

2.† 次の連立方程式を Cramer の公式を用いて解け．

$$(1) \begin{cases} -2x + y - 4z = 4 \\ 4x - 3y + 4z = -3 \\ -x + y - z = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + y + z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

3. 次の空間内の三点を通る平面の方程式の標準形を求めよ．

$$(1) (0, -2, 2), (0, -1, -1), (-2, -1, 5) \quad (2) (-2, 1, 0), (-2, 0, -1), (1, 3, -2)$$

4. (1) 2 次元平面上の同一直線上にない 3 点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) を通る円の方程式は次で与えられることを示せ．

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

(2) 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ．

$$(a) (1, 0), (0, 1), (-1, 0) \quad (b) (4, 5), (4, 4), (3, 3) \\ (b) (3, 0), (5, 0), (2, -3) \quad (c) (2, -4), (1, -5), (5, 2)$$

(3)* 3 点が同一直線上にあるとき, (1) の方程式はどうなるか．

線形代数学・同演習 A

演習問題 13

1. 次の行列の余因子行列を求めよ．また，その逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. n 次正方行列 A に対して， $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ を示せ．

3. (1) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$ とするとき， A の行列式を計算せよ．

- (2) a を整数とするととき， A^{-1} の成分がすべて整数になるような a の値を求めよ^{*1}．

- 4.* 2 次正方行列 A の成分が全て整数であるとする． A^{-1} の成分もすべて整数であるならば， $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ^{*2}．

本日の講義内容とは離れますが，行列の指数写像 \exp というものを紹介します^{*3}．

定義. n 次正方行列 A に対して，指数写像 \exp を次で定義する：

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

- 5.* A を任意の n 次正方行列とする．自然数 N に対して，行列 $\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k$ の (i, j) 成分を $x_{ij}(N)$ とするとき， $\lim_{N \rightarrow +\infty} x_{ij}(N)$ は収束することを示せ．

- 6.* 次の行列を A とするとき，その n 乗 A^n を計算せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- 7.* 問題 6 の行列 A に対して， $\exp(tA)$ ($t \in \mathbb{R}$) を計算せよ．

- 8.* 問題 6, 7 の行列 A および $\exp(tA)$ のトレース tr および行列式に関して，なにか関係はあるか．それはどんな行列に対しても成り立ちそうか．

7 月 25 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

*1 ヒント：余因子行列を考える．

*2 この性質は，一般の n 次のもでも成り立つ．

*3 試験範囲には含めません．この指数写像は“Lie 群と Lie 環”という理論で中心的な役割を果たしますが，他にも常微分方程式などにも応用されています．定義自体は実数における指数写像をそのまま行列に拡張した形ではありますが，その内容は驚くほど多様です．