

この線形代数学の講義は主に行列を扱う科目ですが，高校の数学科目から行列がなくなっため，学生の線形代数学の負担が増えてしまいました．しかも，大学で教える範囲は減っていないので大変です．頑張ってください．

さて，行列とは数字を長方形に並べたもので，行列には‘足し算’，‘スカラー倍’と‘かけ算’が定義されています．この中でかけ算だけ定義が面倒なものになっていますが，なぜこのように定義をするのかということについては後ほど説明する予定です．本日の講義の内容のうち，たとえ正方行列であっても行列のかけ算は可換ではないこと，つまり一般には $AB \neq BA$ であることは覚えておいてください．

この場所では講義の要約や補足，あるいは関連する話題を取り留めもなく書いていくつもりです．必ずしも役に立つ情報があるとは限りませんが，一読いただけますと幸いです．

行列の表記に関する注意 .

行列を書くときはベクトル (x, y) とは違って数字の間にコンマは書きません .

$$\circ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \times \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}$$

ただし 1 行だけの行列 (つまり横ベクトル) は , 今まで通りコンマを入れて書いたりもします .

今回出てきた行列式は , 正方行列において非常に重要なものになります . 詳しい説明は前期の後半に行うことになります .

連立一次方程式は昔から研究されていて、西洋の数学界では微分積分学で有名なライプニッツが行列式を用いた解法を与えている (1693 年) . また、日本の和算家である関孝和はその十年ほど前に行列式を用いている¹⁾ (1683 年) . 行列の重要性が認識されるようになったのは 19 世紀半ばになってからであり、行列よりも行列式の方が先に研究されていたようだ .

ちなみに、中国の書物「九章算術」では連立方程式の解法に行列を用いており、これはなんと紀元前に書かれたものとか . それよりもさらに古い「算数書」という数学書も比較的最近発見されており²⁾、当時の中国の科学水準の高さがうかがえる . 参考文献 .

[1] 城地茂、『算数書』の成立年代について、数理解析研究所講究録 1257 巻 (2002), 150-162.

¹⁾ しかし、連立方程式ではなく高次方程式を解くため .

²⁾ 1983 年頃に湖北省荊沙市荊州区で発見された . 荊州は三国志でも登場する地名 .

前回の板書の訂正：命題 2.4 の証明において、 \sum の和の範囲を間違えていました .

$$\times \sum_{j=1}^m \quad \bigcirc \quad \sum_{j=1}^n$$

指摘してくださった方、ありがとうございます .

また、命題 2.7 において、「 $\det A \neq 0$ ならば A は正則」に加えて、「 $\det A = 0$ ならば A は正則でない」も述べておくべきでした .

・近世数学史談という本についての紹介．

著者は高木貞治という数学者で，類体論を完成させたことで世界的に有名である．本書の舞台は 19 世紀のヨーロッパ．独特の語り口で，しかし軽快なリズムで，ガウス・アーベル・ガロアを始めとした数学界の巨人たちの人生を描いている．第一版は 1933 年 10 月の刊行であるが，その面白さは色褪せることはなく，「21 世紀に入って 10 余年がすぎた今もなお，(中略)『近世数学史談』を超えるものはありません¹⁾」とは，昨年九州大学を退官された高瀬正仁先生の言葉である²⁾．九州大学の図書館にも数冊蔵書があるので，興味のある人は一読してみてもいいのではないでしょうか．

¹⁾ 日本語で書かれた数学史を語る本において．

²⁾ 小谷元子編，数学者が読んでいる本ってどんな本，東京図書

簡約化で連立一次方程式が解けることのカラクリを説明します。

簡約化 (基本変形) は, 拡大係数行列に左から正則行列を掛けることと対応していることを思い出してください。例えば連立一次方程式 $Ax = b$ に対して, 拡大係数行列が $(A|b) \rightarrow (\tilde{A}|b')$ のように簡約化されたとします。これは, ある正則行列 X を用いて

$$X(A|b) = (\tilde{A}|b')$$

となることを意味しています¹⁾。さて, $X(A|b) = (XA|Xb)$ であったことを思い出すと (行列のブロック分割), $XA = \tilde{A}$, $Xb = b'$ ですが, この簡約化の操作というのは, 元の方程式の世界においては

$$Ax = b \Leftrightarrow XAx = Xb \Leftrightarrow \tilde{A}x = b'$$

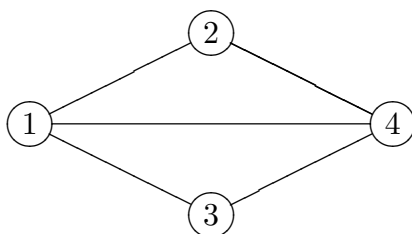
という式変形と対応しています。ここで特に X は正則であるので, 元の連立一次方程式 $Ax = b$ の解と簡約化して得られた連立一次方程式 $\tilde{A}x = b'$ の解が一致することがわかります。これは, X が正則ゆえ逆行列を持つので, それを掛ければ元の方程式に戻ることができるということが効いています²⁾。

¹⁾ 例えば小テスト (5 月 9 日分) で扱った方程式で考えてみると良いでしょう。その場合は, 正則行列 X は $X = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix}$ という行列になります。

²⁾ 小テストの問題において X の逆行列も計算してみて, ここで述べたことが確かに成り立っていることを確認してみましょう。

問題

次のような道があります．① から出発して 3 回移動したときに，再び ① に戻ってくる道の総数は何通りでしょうか．ただし，一度に移動できるのは線がつながっている所だけで，同じところに留まることはできません．より一般に， n 回移動したときに再び ① に戻ってくる道の総数はどうでしょうか．



① から 3 回移動して再び ① に戻ってくるのは ① → ② → ④ → ①, ① → ③ → ④ → ① とその逆順で計 4 通りです．今は 3 回と数が少なかったので風漬しで解けますが，数が多くなってくると難しくなってしまいます．

実はこの問題，行列を使って解くことが出来ます．与えられた図 (グラフ) に対して，① と ① が線でつながっていたら (i, j) 成分に 1，そうでなかったら 0 として行列を作ります (グラフの隣接行列と言います)．今の問題の場合では

$$M := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

です．このとき，① から n 回移動して ① に到達する道の数は，実は M^n の (i, j) 成分にある数と一致します．例えば今の問題では M^3 を計算すると

$$M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 2 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

ですが， $(1, 1)$ 成分にある数字は確かに 4 になっています．この方法は，もっと一般の道 (グラフ) でも通用します．もう一つ面白いことがあります．この道に含まれる三角形の数は $\text{tr}(M^3)/6$ 個です．興味ある方は先程の例で確認してみましょう．

固有値・固有ベクトルについて

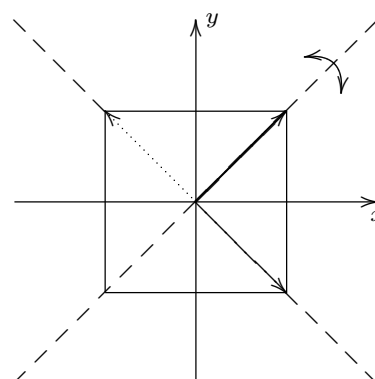
そろそろ，他の講義で固有値・固有ベクトルが出てきてもおかしくないので，ここで簡単に解説しておきます．行列 A に対して

$$Ax = \lambda x$$

を満たすベクトル $x \neq 0$ が存在するとき， λ を固有値と呼び，この x を λ に対応する固有ベクトルといいます． λ が固有値であれば， $(\lambda E - A)x = 0$ を満たすので，方程式 $\det(tE - A) = 0$ の解が固有値となります．そして固有ベクトルは，連立一次方程式 $(\lambda E - A)x = 0$ の解です．

具体例として $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で考えてみます．固有値は $\det(tE_2 - A) = t^2 - 1 = 0$ の解，つまり $\lambda = \pm 1$ になります．固有ベクトルは， $\lambda = 1$ のときは連立一次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ の解，つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり， $\lambda = -1$ のときは，連立一次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ の解，つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となります．

図形的にみると，行列 A の作用は直線 $y = x$ に関する折り返しであって，固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (太線のベクトル) はこの折り返しで変化しません．また固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (単線のベクトル) は折り返しによって点線のベクトルに移りますが，これら二本のベクトルはいずれも同じ直線 ($y = -x$) 上にあります．つまり，“固有ベクトルはその行列の作用によって方向を変えないベクトルである”ということになります．後期に学ぶベクトル空間の言葉を用いると，“固有ベクトルは行列の作用によって不変な部分空間の基底である”と明快に表現することができるようになります．



来週は中間試験です．

場所：1302 教室

試験範囲：行列の基本演算，連立一次方程式，平面・空間の幾何，線形写像．

中間試験の結果

	1	2	3	4	5	総合
平均点	16.1	15	13	15.8	4.9	64.8

大問 1— 全体的に良くできていましたが，逆行列の計算でのミスが目立ちました．

大問 2— 計算ミスが目立ちました．少し工夫を加えると，楽に計算できます．

大問 3— (1),(2) までは解けてほしい問題でした．鏡映写像は線形写像にはなりません，アファイン写像 (平行移動 + 線形写像) になります．

大問 4— よくできていましたが， $a^t a$ の計算に困った学生が多くいました．ちなみに交代行列の表記が $\begin{pmatrix} 0 & -\alpha & -\beta \\ \alpha & 0 & -\gamma \\ \beta & \gamma & 0 \end{pmatrix}$ といった形ではないのは理由があります．

大問 5— 手を付けていない学生が多く，対角行列と対称行列とを混同している人も見受けられました．これらの行列は非常に重要になってきますので，必ず覚えておいてください．

60 点以下の方はレポートを提出していただきます．中間試験の問題を，点数に応じて以下の問題数だけ解き直して，7 月 4 日 (火) までに提出してください．

60 点以下 → 2 題 50 点以下 → 3 題 40 点以下 → 5 題

間違えた箇所だけではなく，大問 1 題すべてです．なお，41 点以上 60 点以下の方の解答する問題の選び方ですが， $i = 1, 2, 3, 4, 5$ に対して

$$(\text{中間試験での大問 } i \text{ の得点}) \div (\text{大問 } i \text{ の総点数})$$

をそれぞれ計算して，低い順から選ぶようにしてください．また，平均点以下の方は提出していただければ少しだけ加点があります．

レポートの書き方についての注意事項

1. 学籍番号および氏名を忘れずに書くこと．
2. レポート用紙は自由です．市販のレポート用紙でなくても，普段使っているルーズリーフでもよいです．ただし，ばらばらにならないようにステープラー等で綴じるようにしてください．
3. 丁寧に書くよう心掛けてください．時々，解読に時間が掛かるものがあったりします．レポートはあくまでも他人に見てもらうものですので，最低限読めるように書いてください．
4. 用紙を使い惜しまないようにしてください．一頁にむりやり詰め込んで書いてしまうと，どの問題について記述しているのかを判別することが難しくなります．
5. レポートは，試験と違ってノート・教科書なども参考にして構いません．

サラスの公式が出てきたので，これに関する話を少し．3 次行列の全展開式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3$$

は，日本では，よく“サラスの公式”と呼ばれています．この‘サラス’というのはフランス人数学者 Sarrus という人物のことですが，フランス人の名前なので，‘サリュュー’と読むのが正しい．さらに，この Sarrus がこの全展開式を発見したという確固とした証拠は見つかっておらず，しかも，この全展開式を世界で初めて発見した人は和算家の関孝和であるというのが現在の有力な説です．こうした理由から，この公式はせめて「関-サラスの公式」と呼ぶべきだという人もいます¹⁾，フランス人の間にさえこの名前は殆ど知られていないとも言われています²⁾．

以下の小論文に詳しく書いてあります．興味のある人は読んでみてください．

参考文献．

[1] 関-Sarrus の公式をめぐって—Sarrus は本当にこれを得たか?—

(阿部剛久，藤野清次; 数理解析研究所講究録 1195 (2001), 38–50)

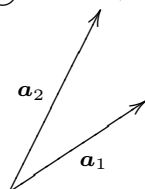
(<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1195-4.pdf>)

¹⁾ もちろん，答案で‘サラスの公式より’と書いて減点，ということはありません．が，この公式が使えるのは 3 次正方行列のみですので，4 次以上の場合に用いた場合はもちろん減点です（というよりも，点が出せません）．

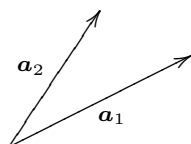
²⁾ 金子晃著「線形代数講義」（サイエンス社）p.69 の脚注より．

2 次正方行列 $A = (a_1, a_2)$ の行列式の符号と，行列を構成するベクトル a_1, a_2 の位置関係について，次のようになると説明しました．

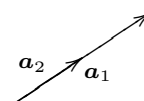
① $\det A > 0$



② $\det A < 0$



③ $\det A = 0$



これについてもう少し詳しく説明します．③のときは明らかなので， $\det A \neq 0$ としておきます．例えば複素数 $z = x + yi$ を $z = re^{i\theta}$ のように分解すると複素数の積の意味が明白になったように，行列 A を

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

のように‘分解’します (岩澤分解という分解の応用です)．ただし， θ は適当な角度， ε は $+1$ か -1 のいずれか， α は実数で d_1, d_2 は正の実数です．このように分解できることは，後期に紹介する Gram-Schmidt の正規直交化法から分かります．また，この分解に現れる行列のうち $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ 以外の行列は行列式は常に正であり，したがって (行列式の積公式より) ε は $\det A$ の符号と一致することが分かります．さて， A を図形 (単位正方形としましょう) に作用させることは，右辺にある各行列を右から順に作用させていくことと対応しています．まず $\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$ は単位正方形を拡大 (又は縮小) して長方形に変形させます．次に $\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は長方形の上の辺を横にスライドさせ平行四辺形に変形させます (ウェブページのアプリケーションを参照)．次に $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ は $\varepsilon = -1$ ならば，平行四辺形を x 軸に関して反転させます．最後に $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ で回転させると， A によって得られる平行四辺形とちょうど一致します．単位ベクトル e_1, e_2 はそれぞれ a_1, a_2 に移ることに注意してください．分解して行った操作のうち， e_1, e_2 (が移っていくベクトル) の位置関係を変える操作は， $\varepsilon = -1$ のときの反転 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ のときだけです． ε は $\det A$ の符号と一致していたことを思い出すと， $\det A$ の符号が負のときに限って反転が起こり，それに伴って a_1 と a_2 の位置関係が変わるのです．

問題

任意の 3 次対角行列 D と可換になる 3 次正方行列は対角行列に限ること，すなわち 3 次正方行列 A が $DA = AD$ を満たすならば A は対角行列であることを示せ．

証明. $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ とおく． DA, AD を計算すると，それぞれ

$$DA = \begin{pmatrix} d_1 a_{11} & d_1 a_{12} & d_1 a_{13} \\ d_2 a_{21} & d_2 a_{22} & d_2 a_{23} \\ d_3 a_{31} & d_3 a_{32} & d_3 a_{33} \end{pmatrix}, \quad AD = \begin{pmatrix} a_{11} d_1 & a_{12} d_2 & a_{13} d_3 \\ a_{21} d_1 & a_{22} d_2 & a_{23} d_3 \\ a_{31} d_1 & a_{32} d_2 & a_{33} d_3 \end{pmatrix} \quad (1)$$

となる．ここで $DA = AD$ とすれば，各成分が等しいので $d_i a_{ij} = a_{ij} d_j$ ($i, j = 1, 2, 3$)，すなわち

$$a_{ij}(d_i - d_j) = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

である．これが任意の対角行列 D について成り立つので，特に $d_1 \neq d_2, d_2 \neq d_3, d_3 \neq d_1$ とすれば， $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) でなければならないことがわかる．これは

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$$

であることを意味しており，この場合は，式 (1) より任意の対角行列 D と可換になる．よって，任意の 3 次対角行列 D と可換になる 3 次正方行列は対角行列に限ることが示された． \square


コメント

● まず定義をしっかりと把握しましょう．「対角行列」とは，対角成分（つまり a_{ii} たち）以外の成分がすべて 0 である行列です．ここで，対角成分にはなんの制約もないことに注意が必要です．よって，例えば単位行列 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ や零行列 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ なども対角行列に含まれます．

● 問われていることをしっかりと把握しましょう．この問題を標語的に表せば，

「 A : 正方行列 s.t. $AD = DA$ for $\forall D$: 対角行列 $\Rightarrow A$: 対角行列」を示せ

となります．この問題のポイントは， A の成分は自由に動かすことができないが， D の成分は自由に動かすことができるという点です．その御蔭で，式 (2) において $d_i \neq d_j$ ととることができて， $a_{ij} = 0$ ($i \neq j$) を導けるのです．



期末試験について .

期末試験の日程および場所は教務課による通知を各自確認してください .

形式は中間試験と同様 . 出題範囲は前期扱った内容すべてですが , 中間以降の内容に重点を置きます . 講義や小テスト , 演習問題にある問題から多く出題する予定です . 連立一次方程式や行列式は必ず解けるようにしておいてください .

範囲 : 中間試験の範囲 (連立一次方程式 , 逆行列 , 平面・空間の幾何) ,

置換群 (置換の積 , 巡回置換への分解 , 置換の符号) ,

行列式の計算 (基本変形による計算 , 余因子展開 , 高次の行列の行列式) ,

その応用 (Cramer の公式 , 正則行列)

中間試験の大問 3 の解答 .

(1) 求める平面は \overrightarrow{OP} を通り , $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の方向を持つ平面であるので , そのパラメータ表示は $x = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. これからパラメータを消去すれば

$$x - 2y + 2z = 3 \quad (\text{答}).$$

(2) 法線ベクトル a は平面の方程式の係数からなるベクトルなので , $a = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$. 単位法線ベクトル n は , この法線ベクトルを長さで割ったものであるので , $n = \frac{1}{\|a\|} a = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ (答) .

(3) 平面 π 上の点 H を取ったとき , 空間上の点 P との距離 \overrightarrow{PH} を最小にする方向は法線ベクトルの方向である¹⁾ . よって $\overrightarrow{PH} = \alpha n$ とすれば , $\|n\| = 1$ より $|\alpha|$ が求める距離となる . さて , $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PH}$ が平面 π 上にあるので ,

$$3 = \langle a | \overrightarrow{OH} \rangle = \langle a | x + \alpha n \rangle = \langle a | x \rangle + \alpha \|a\| .$$

これより $\alpha = \frac{3 - \langle a | x \rangle}{3}$, すなわち

$$|\alpha| = \frac{|3 - \langle a | x \rangle|}{3} = \frac{|3 - x + 2y - 2z|}{3} \quad (\text{答}).$$

(4) 与えられた図より鏡映写像によって点 P が移る点 P' は , (3) で用いた平面 π 上の点 H を用いると $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PH}$ と表すことができる . ここで $\overrightarrow{PH} = \frac{3 - x + 2y - 2z}{3} n$ であつたので ,

$$\begin{aligned} x' &= x + 2 \cdot \frac{3 - x + 2y - 2z}{3} n = \dots (\text{略}) \dots = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7x + 4y - 4z + 6 \\ 4x + y + 8z - 12 \\ -4x + 8y + z + 12 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & -4 \\ 4 & 1 & 8 \\ -4 & 8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\text{答}). \end{aligned}$$

¹⁾ 本来は証明すべき事実であるが , 講義中で紹介したので既知とする . 証明するならば , 2 変数関数の最大最小問題になるので少し面倒 . というよりも , 扱うのは後期になってからのはず .