

線形代数学・同演習 B

10月10日分 質問への回答

質問 式が多くイメージがつかみづらかった。

- 大学数学において、線形代数学は抽象的議論の入門という扱いになっています。ある集合が特定の性質をみたす、という条件から様々な性質を導いていくことになりませんが、その性質は式によって記述されるので、どうしても式が多くなってしまいます。与えられた式が、数ベクトル空間 \mathbb{R}^n においてはどのような意味を持っているのか、という視点から少しずつイメージを膨らませていくことは可能かと思います。

質問 前期を適当に過ごしてしまい、後期が不安です。どのように前期の復習をすればよいですか？

- 前期で学んでおくべきことは、
 - (i) 連立一次方程式を解けるようになること
 - (ii) 行列の扱いに慣れること
 - (iii) 行列式の意味を理解し、計算ができるようになること

です。いずれも、教科書や配布した演習問題を利用して、自分の手を動かして問題を解くことが肝要です。また、(iii) についてですが、「行列式は、行列を線形変換とみたときの図形の拡大率である」という理解が一番わかりやすいと思います。様々な文脈で自然に現れてくるものなので、しっかりと理解しておきましょう。

質問 通常の演算でベクトル空間とはどういうことですか。

- ベクトル空間は、「ある集合が和とスカラー倍を持つ」という定義でした。言い換えると、ベクトル空間を考える際には、集合だけではなく、演算も指定する必要があるということです（これは抽象的に集合を扱う以上、避けられないことです）。数ベクトル空間 \mathbb{R}^2 における通常の演算とは、普段から使っている、次のような和とスカラー倍のことです：

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}, \quad \lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}.$$

この空間に別の和・スカラー倍を入れてベクトル空間にできるかということについては、私はよく分かりません（無理だとは思っていますが...）。

質問 さっぱり分からない

- 抽象的な議論になれるためには辛抱が大事です。がんばってください。

質問 日本語で OK

- 日本語で話しています。

線形代数学・同演習 B

10 月 17 日分 質問への回答

質問 小テストの時間が短い..

— 10 分程度は確保できるよう努めます .

質問 結局前回の内容がよくわかりません。

— 前回は , ベクトル空間およびその部分空間を導入しました . ベクトル空間は , 「和」と「スカラー倍」を持つという性質だけを仮定した集合で , そこからどのような性質を導けるのかということを見ていきます . ですので , 今理解しておくべきことはその定義と , ベクトル空間の重要な具体例を知っておくことです . また , 集合の扱い方についても徐々に慣れていくようにしてください .

線形代数学・同演習 B

10 月 24 日分 質問への回答

質問 $V = \mathbb{K}^n$ のときというのがよくわかりません。 \mathbb{K}^n というのは何を示すのでしょうか？

— $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または \mathbb{C} なので、数ベクトル空間を表します。実数、複素数どちらの場合も並行して扱うために、 \mathbb{K} という記号を用いています。わかりにくかったらどちらか片方に読み直してください。

質問 逆行列をもとめる時とか計算まちがえる気しかしないんですけど、もしなにかミスをへらす方法があったらおしえて下さい。

— 前期の講義において紹介した逆行列の計算方法は 2 通りありました。一つ目は単位行列と並べて基本変形を行う方法、二つ目は余因子行列を行列式で割る方法です。計算が速いのは基本変形による手法ですが、分数が現れることが計算ミスを誘発する原因になっています。そこで、二つ目の方法にあるように、行列式がその分母に来るということが分かっているので、予め行列式を計算しておいて基本変形の際には $(A | (\quad) / \det)$ のように初めから右側の行列を行列式で括っておけば無用な分数計算は避けられます。

書いていて気が付きましたが、 $P^{-1}Q$ を計算する方法として、 $(P|Q)$ を基本変形して $(E_n|R)$ とできれば $R = P^{-1}Q$ になります。

線形代数学・同演習 B

10 月 31 日分 質問への回答

質問 ・ベクトルに span をとることで部分空間になるということ？

・「ベクトルを送る」というのがよくわかりません。

そもそもベクトルがなにかわからなくなりそう。

— ・Span をとる，ということはベクトルの線形結合全体のなす空間を作ることです．そのようにして作った集合は，必ず部分空間になります．

・「ベクトルを送る」は， $m \times n$ 行列 A を写像 $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ と思って， \mathbb{R}^n の元 (=ベクトル) を \mathbb{R}^m の元に写すという意味です．

一般のベクトル空間の要素をベクトルということが多いです．ただし，具体的なベクトル空間のときはそれに合わせた用語を用います．

線形代数学・同演習 B

11 月 7 日分 質問への回答

質問 基底を求めることにどんな意味がありますか．

ところで最近寒くなってきましたね．私はかぜをひいてしまったようですが，先生は変わりありませんか？

— 講義で扱うようなベクトル空間は大抵の場合自然な基底を持つものばかりなので，ありがたみは薄いですが，複雑な空間になってくると，基底を指定しさえすれば数ベクトル空間のように扱えるので，非常に重宝します．私が専門としている表現論という分野では，行列のなすベクトル空間において基底をうまく選ぶことにより，非常に見通しよく，その構造を調べることができるようになっています．

もう 11 月になりましたね．風邪などは引いていませんが，この時期に体調を崩す人も多いので，皆さんも気をつけましょう．

線形代数学・同演習 B

11 月 14 日分 質問への回答

質問 — n 次元は $n - 1$ 次元で表せないのに表現行列はより小さい基底の本数で表せることが少しわかりにくかったです

— P, Q が何なのかがいまいわからなかったです。

— 「 n 次元は $n - 1$ 次元で表せない」のは確かにそうですが、写像はある空間を別の空間に写すものなので、元の空間と行った先の空間のどちらで考えているのかをしっかりと把握しておくことが重要です。今の場合は、写像で送った後のものを考えるので行った先の基底で考える必要があります。ちなみに「表現行列はより小さい基底の本数で表せる」というのは少し変な表現です。

► P, Q は後期の 3 回目の講義で扱った基底の変換行列です。ベクトル空間 U の要素は基底を指定すれば数ベクトルとすることができるわけですが、その基底のとり方によって、一般には対応する数ベクトルが変わってきます。例えば U の要素 u は基底 $[u_1, \dots, u_n]$ のときは $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ というベクトルと対応していて、

別の基底 $[\tilde{u}, \dots, \tilde{u}_n]$ のときは $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ というベクトルと対応しているとします。数式で書けば

$$u = [u_1, \dots, u_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\tilde{u}, \dots, \tilde{u}_n] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

です。このとき、 x と y は、適当な正則行列 P を用いて

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

のように書くことができます。この P が基底の変換行列です。

線形代数学・同演習 B

11 月 21 日分 質問への回答

- 質問
- 固有値方程式の時から λ じゃだめなんですか？
 - 「固有ベクトルは」と書くのが少しめんどくさいのですが「 λ は」のような省略形はないんですか．
- 与えられた行列に対し，固有値は（複数あるとはいえ）確定するものなので「 λ は」のように表現できるのだと思います．一方で，中間試験の後に改めて説明することになりますが，固有ベクトルは「 $Ax = \lambda x$ を満たすベクトル全体からなる部分空間の基底」なので，その取り方には任意性があります．実際，今回の小テストにおいても，求めた固有ベクトルに 0 でない定数倍を施しても，また固有ベクトルになります．そのような理由から，固有ベクトルには，固有値のような省略形はないのだと思います．少なくとも，見たことはないです．また，行列に対して固有値というものは特別であり， λ は固有値を表すとしているので，固有値を探す段階から λ を使うことには抵抗があります．

線形代数学・同演習 B

12 月 12 日分 質問への回答

質問 エアコン 20℃でも寒かったです... .

— 最近は特に寒くなりましたね．あまり室温を上げすぎると睡魔を誘ってしまうと思うので，だいたいこのくらいでいいような気がします．

線形代数学・同演習 B

12 月 19 日分 質問への回答

質問 対角化はあまり何をしているか分かっていませんが，なんとなく楽しいです．

- 対角化の計算は線形代数学で学んできたことを全部使った計算になるので，ちゃんと計算できることがすなわち線形代数の講義を理解したことになります．実際に応用する場面では，必ずしも具体的な計算が必要ではなく，うまく P を選べば対角線に固有値が並ぶ対角行列にできるということで間に合うことも多いです．

線形代数学・同演習 B

1 月 9 日分 質問への回答

質問 あけましておめでとうございます 今年もよろしくお願いします (予想では同じメッセージがあと 4 通あります). ところで、多項式が直交するとはどういう状態ですか？

— おめでとうございます。今年もよろしくお願いします。残念ながらこのクラスは一つだけでした。別のクラスはもう少し多いですが、数学の質問が少ないです。

さて、多項式に対しても直交という言葉を使いますが、もはや図形的・幾何学的な意味は失われてしまっています (そもそも内積の取り方に任意性がある)。それでも、数ベクトルにおける標準基底 e_1, e_2, \dots に対応するものを、多項式の空間などに導入することができます。正規直交基底と呼ばれるもので、応用上でとても重要なものになります。

線形代数学・同演習 B

1 月 16 日分 質問への回答

質問 $P^t = P^{-1}$ になることってあんまりない気がしますが、そのようになるときの P に P でのみで成り立つ規則性みたいなものってありますか？ (変な質問だったらすいません)

- 非常によい視点です．来週紹介することですが， $P = (p_1, \dots, p_n)$ のように縦ベクトルの集まりとしてみたとき， $[p_1, \dots, p_n]$ は \mathbb{R}^n の正規直交基底になります．しかも，この逆も成り立ちます．これが直交行列の際立った性質かと思います．また，直交行列のうち $\det P = 1$ をみたすものは，適当な交代行列 X を用いて $P = \exp X$ のように表すことができます．つまり，直交行列のなす空間は交代行列のなす空間と非常に深く関連しているのです．

線形代数学・同演習 B

1 月 23 日分 質問への回答

- 質問
- 「共役になる行列」がよくわかりません。
 - 「正規直交基底」という良い基底に関する表現行列＝直交行列ですよね？
 - 固有値が実数だったら直交行列で三角行列できるというのと対称行列は直交行列で対角行列にできるってのはなんとなくわかったんですが、必ずしも三角＝対角でないのにどのようにこれらが関係してくるのがよく分かりませんでした。
-
- 二つの行列 A, B が共役というのは、ある正則行列 P を用いて $B = P^{-1}AP$ のように書けるときをいいます。このとき、二つの行列は同じ線形変換の、異なる基底に関する表現行列になっています。
 - 『「正規直交基底」という良い基底に関する表現行列＝直交行列』確かに直交行列は正規直交基底を構成する列ベクトルが並んだ構造をしています。これは違います。一般に、表現行列というのは一般の写像に関するものであり、そこには直交性などの条件は全く含まれていません。
 - まず定義より、対角行列は三角行列に含まれています。よって、講義中の定理 12.7 より実対称行列は固有値が必ず実数になるので、直交行列により三角化できます。式で書けば、 $A = {}^tPTP$ (P は直交行列、 T は三角行列) です。さて、今 A は対称行列としているので ${}^tA = A$ です。これは

$$A = {}^tPTP = {}^tP{}^tTP = {}^tA \Leftrightarrow {}^tT = T$$

という条件に書き換えることができ、三角行列のうちで ${}^tT = T$ を満たすものは対角行列に限る、ということが実対称行列が対角化可能であるということが導かれるというカラクリです。ここで効いてきているのは直交行列ならば $P^{-1} = {}^tP$ であるということです。これがあるから対称行列の性質 ${}^tA = A$ の条件が活きてきます。

線形代数学・同演習 B

1 月 30 日分 質問への回答

質問 後期の間ありがとうございました。あと 1 コメントにつき点数 +2 点くらいされてほしいです。

— こちらこそ、半年ですが講義にお付き合いくださりありがとうございます。そこまで高くはありませんが、実は加点はあったりします。