

線形代数学・同演習 B

小テスト 1 (10 月 10 日分)

学籍番号：

氏名：

$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ とするとき，次の集合は $V = \mathbb{R}^3$ の部分空間になるか調べよ．

$$(1) \quad W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3; Ax = 0\} \quad (2) \quad W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3; Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$$

解) 講義中の命題 1.8 を用いる．

(1) $x, y \in W_1$ とすると， $Ax = 0, Ay = 0$ である． $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda x + \mu y \in W_1$ を調べる．

$$A(\lambda x + \mu y) = \lambda(Ax) + \mu(Ay) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

よって $\lambda x + \mu y \in W_1$ である．また \mathbb{R}^3 の零元は零ベクトル 0 であり，明らかに $A0 = 0$ であるので $0 \in W_1$ ．以上より W_1 は \mathbb{R}^3 の部分空間となることが分かる．

(2) $x \in W_2$ とすると， $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ である． λx に対して $\lambda x \in W_2$ を調べる．

$$A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}.$$

よって $\lambda \neq 1$ ならば $\lambda x \notin W_2$ であるので， W_2 は \mathbb{R}^3 の部分空間でない．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 2 (10 月 17 日分)

学籍番号：

氏名：

次の 4 つのベクトルの組は線形独立になるか調べよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

(考え方) 与えられたベクトルを並べて行列を作り，簡約化して，行列の階数を調べる．階数が与えられたベクトルの本数と一致するならば線形独立であり，そうでないならば線形従属になる．

(1) 与えられたベクトルの組からなる行列を簡約化すると

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので，このベクトルの組は線形独立である．

(2) 与えられたベクトルの組からなる行列を簡約化すると

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -1 & -3 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，このベクトルの組は線形従属である．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 3 (10 月 24 日分)

学籍番号：

氏名：

次のベクトルの組は \mathbb{R}^4 の基底をなすかどうか調べよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 19 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(考え方) 与えられたベクトルを並べて行列を作り，その行列が正則かどうか調べる．
正則ならば基底になり，そうでないならば基底になれない．

(1) 与えられたベクトルの組からなる行列の行列式を計算すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 19 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 10 \end{vmatrix} = 1$$

なので，このベクトルの組は \mathbb{R}^4 の基底をなす．

(2) 与えられたベクトルの組からなる行列の行列式を計算すれば

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

なので，このベクトルの組は \mathbb{R}^4 の基底にはなれない．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 4 (10 月 31 日分)

学籍番号：

氏名：

ベクトル a_1, a_2, a_3, a_4 および行列 A を次のように定めるとき，次の問題に答えよ．

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) \mathbb{R}^3 の部分空間 $W_1 := \text{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ の次元と，その基底を一組求めよ．

(2) 行列 A に関する解空間 $W_2 := \ker A$ の次元と，その基底を一組求めよ．

(考え方) まず与えられた行列を簡約化する．(1) 与えられた列ベクトルの中で線形独立なものを探す；簡約化した行列で，主成分がある列に対応するベクトルを持ってくればよい．(2) 与えられた行列を係数行列に持つ連立一次方程式を解けばよい．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -4 & 1 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 簡約化した行列の主成分に数は 2 本なので， $\dim W_1 = 2$ ．主成分がある列は 1 列目と 2 列目なので， W_1 の基底として $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ と $a_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

(2) 連立一次方程式 $Ax = 0$ を解く． $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$ とする． A の簡約化は既に計算しており，次の方程式に簡約化される； $x - z - w = 0$, $y + z = 0$ ．ここでパラメータ s, t を導入し， $z = s$, $w = t$ とすれば $x = s + t$, $y = -s$ なので，この方程式の解は

$$\begin{pmatrix} s+t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

である．パラメータの数が 2 なので解空間の次元は $\dim W_2 = 2$ であり， W_2 の基底として $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ がとれる．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 5 (11 月 7 日分)

学籍番号：

氏名：

次の行列 A に対して，(1) 線形写像 T_A の階数と退化次元，(2) 部分空間 $\text{Im } T_A$ の基底を一組，それぞれ求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

(考え方) まず A を簡約化する．

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 線形写像 T_A の階数 $\text{rank } T_A$ は A を簡約化したものの主成分の数に等しいので， $\text{rank } T_A = 3$ ．また T_A の退化次元は，次元公式より

$$\text{null } T_A = \dim U - \text{rank } T_A = 4 - 3 = 1$$

であるので， $\text{null } T_A = 1$ ．

(2) T_A においては $\text{Im } T_A$ は A の列ベクトルから生成される部分空間であるので，主成分に対応する列ベクトルが基底となる．よって， $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選べば良い．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 6 (11 月 14 日分)

学籍番号：

氏名：

$U = \mathbb{R}[x]_2$, $V = \mathbb{R}[x]_1$ とし, 線形写像 $T: U \rightarrow V$ を, $T(p(x)) = p'(x) + p(0)x$ により定義するとき, 次の U, V のそれぞれの基底に関する T の表現行列 B を求めよ.

$$U: [x^2 + x, x^2 + 2x - 1, -x + 2] \quad V: [2x + 5, x + 3]$$

(考え方) 講義中の定理を用いるのが楽である. そのためにまず, T の標準基底に関する表現行列を求める.

解) T の標準基底 $[x^2, x, 1]$ および $[x, 1]$ に関する表現行列 A を求める.

$$x^2 \mapsto 2x = [x, 1] \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad x \mapsto 1 = [x, 1] \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad 1 \mapsto x = [x, 1] \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

なので, $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である. 次に基底の変換行列 P, Q を求める.

$$\begin{aligned} [x^2 + x, x^2 + 2x - 1, -x + 2] &= [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = [x^2, x, 1]P, \\ [2x + 5, x + 3] &= [x, 1] \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = [x, 1]Q. \end{aligned}$$

このとき求める表現行列 B は $B = Q^{-1}AP$ で与えられるので,

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -8 & -1 & -12 \end{pmatrix}. \quad \square$$

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください.

線形代数学・同演習 B

小テスト 7 (11 月 21 日分)

学籍番号：

氏名：

次の行列 A の固有値と，対応する固有ベクトルを求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(考え方) まず固有多項式 $g_A(t)$ を計算し，方程式 $g_A(t) = 0$ を解く．その解が固有値である．固有値を λ と書けば連立一次方程式 $(\lambda E_3 - A)X = 0$ の解空間の基底が，固有値 λ に対応する固有ベクトルである．

解) 固有多項式は以下で与えられるので，固有値は $\lambda = 1, -2$ である．

$$\det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -6 \\ -6 & t-1 & 6 \\ 3 & 0 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1) \begin{vmatrix} t+5 & -6 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+2).$$

(i) $\lambda = 1$ のとき．連立方程式 $(E_3 - A)x = 0$ を解く．

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\text{rank}(E_3 - A) = 1$ より解空間の次元は 2．方程式に戻せば $x - z = 0$ (y は任意)．解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ なので，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

(ii) $\lambda = -2$ のとき．連立方程式 $(-2E_3 - A)x = 0$ を解く．

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

解空間の次元は 1．方程式に戻せば $x - 2z = 0$, $y + 2z = 0$ なので解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ．よって固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 8 (12 月 12 日分)

学籍番号：

氏名：

次の行列 A の固有値と，対応する固有空間を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(考え方) まず固有多項式 $g_A(t)$ を計算し，方程式 $g_A(t) = 0$ を解く．その解が固有値である．固有値を λ と書けば連立一次方程式 $(\lambda E_3 - A)X = 0$ の解空間の基底が，固有値 λ に対応する固有ベクトルである．そして，その固有ベクトルで生成される空間が固有空間である．

解) 与えられた行列は小テスト 7 のものと同じなので，固有値および固有ベクトルの計算はそちらを参照ください．

(i) 固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であったので，対応する固有空間は

$$W(1; A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(ii) 固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であったので，対応する固有空間は

$$W(2; A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 9 (12 月 12 日分)

学籍番号：

氏名：

次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．裏面も使用してよい．

$$(1) \quad A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & -6 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(考え方) 対角化に必要なのは固有値と固有ベクトル．求める対角行列は固有値を対角に並べたものであり，対角化を与える正則行列 P は固有ベクトルを並べたものである．対角化できるための条件は，各固有値について，線形独立な固有ベクトルが，固有値の重複度の数だけ存在することである．

解) 与えられた行列は小テスト 7 のものと同じなので，固有値および固有ベクトルの計算はそちらを参照ください．

(1) 固有多項式は $g_A(t) = (t-1)^2(t+2)$ なので，固有値は $\lambda = 1$ (重複度 2)， -2 である．固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，重複度の数だけ固有ベクトルがある．また，固有値 $\lambda = -2$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である．よって A は対角化可能で，

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば， $D = P^{-1}AP$ と対角化できる．

(2) 固有多項式は $g_B(t) = (t-2)(t-1)^2$ なので，固有値は $\lambda = 1$ (重複度 2)， 2 である．まず重複度が大きいものから計算する．固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ の 1 本だけである．よって，重複度の本数分の固有ベクトルがないので，対角化できない．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 10 (1 月 9 日分)

学籍番号：

氏名：

$V = \mathbb{R}[x]_2$ とする．2 つの多項式 $p(x) = x^2$, $q(x) = x$ と直交する (零多項式ではない) 多項式 $f(x)$ を一つ求めよ．ただし, V の内積は次で与えられているとする．

$$(f|g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (f, g \in V).$$

(考え方) 求める多項式を $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．これが $p(x)$ と $q(x)$ と直交するので, 次の 2 つの条件を満たす: $(f|p) = 0$, $(f|q) = 0$. これは a, b, c に関する連立一次方程式なので, それを解けばよい．

解． $f(x) = ax^2 + bx + c$ とすれば,

$$(f|p) = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)x^2 dx = \left[\frac{ax^5}{5} + \frac{bx^4}{4} + \frac{cx^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c,$$

$$(f|q) = \int_{-1}^1 (ax^2 + bx + c)x dx = \left[\frac{ax^4}{4} + \frac{bx^3}{3} + \frac{cx^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}b.$$

よって, 次の連立一次方程式の非自明な解を求めればよい (適当に定数倍をしている)．

$$3a + 5c = 0, \quad b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

これより, 例えば $s = 1$ とした次の多項式が求める多項式になる ($s \neq 0$ ならばよい)．

$$f(x) = 5x^2 + 0 \cdot x + (-3) = 5x^2 - 3. \quad \square$$

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 11 (1 月 16 日分)

学籍番号：

氏名：

次の 3 本のベクトルに対して Gram-Schmidt の直交化法を適用して直交化せよ。

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

(考え方) Gram-Schmidt の直交化法をそのまま適用すればよい。

解．まずは $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ より， $\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ．次に $(\mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より，

$$\tilde{\mathbf{v}}_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-0 \\ 0-1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

よって， $\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-1)^2} = 3\sqrt{2}$ なので $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ ．最後に，

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-2) \cdot 1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_2) &= \frac{1}{3\sqrt{2}}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + (-2) \cdot (-1)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

より， $\tilde{\mathbf{v}}_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2$ を計算すれば

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6+3-1 \\ 0+0-4 \\ -12+3+1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

よって， $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3$ より， $\mathbf{u}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ．以上より，

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \quad \square$$

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください。

線形代数学・同演習 B

小テスト 12 (1 月 23 日分)

学籍番号：

氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が正定値であることを，固有値を求めることによって直

接示せ．

(考え方) 実対称行列の固有値がすべて正であるとき，正定値であるという．よって，固有値を計算して全て正であることを確認する．実際の計算では，主小行列式がすべて正であることも同値なので，それを利用するとよい．

解． A の固有多項式は

$$g_A(t) = (t - 1)^2(t - 4)$$

なので，固有値は $1, 4$ である．これらはどちらも正なので， A は正定値である．

別解．与えられた行列の主小行列は

$$A_1 = (2), \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

である (左上から正方行列をとる) ので，

$$\det A_1 = 2, \quad \det A_2 = 4 - 1 = 3$$

および

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

よって，主小行列式がすべて正なので， A は正定値である．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

小テスト 13 (1 月 30 日分)

学籍番号：

氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ。

(考え方) まずは通常の行列と同様に対角化する。その後で、固有ベクトルの組に対して Gram-Schmidt の直交化法を適用して直交行列を構成する。

解。前回の小テストより、固有値は 1, 4 である。 $\lambda = 1$ のとき、固有ベクトルは

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

退化次元が 2 なので、固有ベクトルは 2 本ある： $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。 $\lambda = 4$ のとき、固有ベクトルは

$$4 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

退化次元が 1 なので、固有ベクトルは 1 本： $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

ベクトルの組 $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ を並べたものが対角化を与える正則行列になるので、これを直交化する。すると、

$$P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となり (計算は小レポート 11 を参照)、これを使って次のように対角化できる。

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください。