

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 1

1. 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} x + 3y + 5z + w = 2 \\ 3x + y + 7z + 3w = 14 \\ 5x - y + 9z + w = 22 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - y - 7z + w = -10 \\ 5x - 11y - 23z - 7w = 22 \\ x - 4y - z - 5w = 8 \end{cases}$$

2. 次の行列の行列式を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -8 & 1 & -3 \\ -7 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

3. 次の多項式の集合の要素を具体的に表せ<sup>\*1</sup>．

- (1)  $X_1 = \{2 \text{ 次以下の実数係数の多項式全体} \}$
- (2)  $X_2 = \{2 \text{ 次以下の実数係数の多項式で, 係数の和が } 0 \text{ となるもの全体} \}$
- (3)  $X_3 = \{3 \text{ 次以下の実数係数多項式で, 微分したら多項式 } x^2 + x \text{ になるもの全体} \}$
- (4)  $X_4 = \{ \text{実数係数の } 2 \text{ 次多項式全体} \}$

4.  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  とおくとき, 次の集合は  $\mathbb{R}^3$  の部分空間となるか．

$$(1) W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3; Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\}, \quad (2) W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3; Ax = \mathbf{0}\}.$$

5.† ベクトル空間  $V = \mathbb{R}[x]_3$  において, 次のような部分集合は,  $V$  の部分空間となるか．

- (1) 2 次多項式全体
- (2)  $(x - 1)$  で割り切れるような多項式全体
- (3) 定数項が 0 である多項式全体
- (4) 各係数の和が 1 であるような多項式全体

6.†  $V$  をベクトル空間とし,  $W_1, W_2$  をその部分空間とする．このとき, 次の空間は  $V$  の部分空間になるかどうか調べよ．

- (1)  $W_1 \cap W_2 := \{u \in W; u \in W_1 \text{ かつ } u \in W_2\}$
- (2)  $W_1 + W_2 := \{u_1 + u_2 \in W; u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$
- (3)  $W_1 \cup W_2 := \{u \in W; u \in W_1 \text{ または } u \in W_2\}$

7.† ベクトル空間  $V = M(2, \mathbb{R})$  の以下のような部分集合は,  $V$  の部分空間となるか?

- (1)  $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \{A \in V; \text{tr}(A) = 0\}$
- (2)  $\mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) := \{B \in V; B + {}^tB = O\}$
- (3)  $SL(2, \mathbb{R}) := \{C \in V; \det C = 1\}$
- (4)  $SO(2, \mathbb{R}) := \{D \in V; D {}^tD = E_2\}$

---

10 月 10 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*1 少し問題が曖昧であるが, たとえば (1) なら実数  $a, b, c$  を用いて  $ax^2 + bx + c$  と表せる, など．

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 2

1.†  $W_1, W_2$  は  $V = \mathbb{R}^2$  の,  $W_3, W_4$  は  $C(\mathbb{R})$  の部分空間となるか.

(1)  $W_1 = \{(y, ay); y \in \mathbb{R}\}$  ( $a$  は定数) (2)  $W_2 = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$

(3)  $W_3 = \{f \in C(\mathbb{R}); f(x) \geq 0\}$

(4)  $W_4 = \left\{g \in C(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty\right\}$

2. 次の  $\mathbb{R}^3$  のベクトルの組は線形独立か.

(1)  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

(2)  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

3.† 次の  $\mathbb{R}^4$  のベクトルの組は線形独立か.

(1)  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{u}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

(2)  $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}.$

4.† 次の多項式の組は線形独立になるか調べよ.

(1)  $f_1(x) = x^2 + 4x + 3, f_2(x) = 4x^2 - 3x + 2, f_3(x) = 4x^2 - 4x - 1.$

(2)  $g_1(x) = x^2 - 1, g_2(x) = 2x^2 + x - 1, g_3(x) = x^2 - 2x - 3.$

(3)  $h_1(x) = x^2 - 4, h_2(x) = x^2 + x - 4, h_3(x) = 5x^2 - 2x + 1.$

(4)  $k_1(x) = x^2 + 4x + 1, k_2(x) = 2x^2 + x - 3, k_3(x) = 3x^2 - 2x - 7.$

5.  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$  は線形独立とする. このとき, 次のベクトルは線形独立となるか?

$$(1) \begin{cases} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 = -\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{w}_3 = 3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3 + 12\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{w}_4 = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_3 + 10\mathbf{u}_4 \end{cases}$$

6.  $V = \mathbb{R}[x]_3$  を 3 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする.

(1) 多項式の組  $(x+1)^3, (1+x)^2, 1+x, 1$  は線形独立であることを示せ.

(2) 多項式  $p(x) = x^3$  を (1) の多項式の線形結合で表わせ.

7.† 次の命題が正しいならば証明し, 間違っているならば反例を示せ.

(1)  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$  が線形独立ならば,  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3$  も線形独立.

(2)  $n \geq 3$  を自然数とする.  $n$  本のベクトルの組  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  が線形独立ならば,  $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$  および  $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$  も線形独立.

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 3

1. 次のベクトルの組は、 $\mathbb{R}^4$  の基底をなすか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

2.  $V$  を 1 次以下の 2 変数多項式  $ax + by + c$  の全体がなす集合とする。

- (1)  $V$  は自然な演算でベクトル空間となることを確認せよ。
- (2)  $V$  の次元はいくつか? また  $V$  の自然な基底を 1 組求めよ。
- (3) 平面の 3 点  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (1, 0)$ ,  $P_3 = (0, 1)$  において, それぞれ指定された値  $c_1, c_2, c_3$  をとるような  $V$  の元を表すのに最も適した  $V$  の基底を求めよ。<sup>\*1</sup>

- 3<sup>†</sup> 次の多項式の組は  $\mathbb{R}[x]_3$  の基底になるか調べよ。

$$(1) \begin{cases} p_1(x) = x^3 - 3x \\ p_2(x) = x^2 - 5x - 4 \\ p_3(x) = 3x^3 - x + 2 \\ p_4(x) = 2x^2 + x + 1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} q_1(x) = x^3 - x \\ q_2(x) = 4x^3 - x^2 - 3 \\ q_3(x) = -3x^3 + 6x^2 + x + 8 \\ q_4(x) = x^3 + 5x^2 + x + 5 \end{cases}$$

- 4<sup>†</sup>  $n$  次の対称行列全体の集合を  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  で表す。

- (1)  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  はベクトル空間となることを確認せよ。
- (2)  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  の次元を求めよ。
- (3)  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  の基底を一組求めよ<sup>\*2</sup>。

- 5<sup>†</sup>  $\mathbb{R}[x]_2$  において, 多項式  $ax^2 + bx + c$  を次の基底  $q_1, q_2, q_3$  に関してベクトル表示せよ。

- (1)  $q_1(x) = 1, q_2(x) = x, q_3(x) = x^2$ .
- (2)  $q_1(x) = x^2 + x + 1, q_2(x) = x + 1, q_3(x) = 1$ .
- (3)  $q_1(x) = x^2 + x, q_2(x) = x^2 + 2x - 1, q_3(x) = -x + 2$ .

- 6.<sup>\*</sup> (1) 複素数  $\mathbb{C}$  は実数体  $\mathbb{R}$  上のベクトル空間とみなせることを示しその次元を求めよ。  
(2) 実数の集合  $\mathbb{R}$  は有理数の集合  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$  上のベクトル空間とみなせることを示せ。また, 円周率  $\pi$  が超越数<sup>\*3</sup>であることを利用して, その次元は無限大となることを示せ。

---

10 月 24 日分 (凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, <sup>\*</sup> は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

<sup>\*1</sup>  $f_i(P_j) = \delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) となる多項式  $f_1, f_2, f_3$  を求めればよい。

<sup>\*2</sup> 行列単位  $E_{ij}$  を用いるとよい。これは  $(i, j)$  成分のみが 1 でそれ以外の成分はすべて 0 である正方行列である。サイズは文脈に応じて定める。

<sup>\*3</sup> どんな整数係数 (有理数係数) 多項式  $p(x)$  に対しても  $p(x_0) \neq 0$  であるとき, 実数  $x_0$  を超越数という。

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 4

1. 次のベクトルで生成される部分空間の次元と、その基底を一組求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

2.† 次の多項式の組で生成される  $V = \mathbb{R}[x]_3$  の部分空間の次元と基底を求めよ\*<sup>1</sup>．

$$(1) \begin{cases} f_1(x) = x^3 - x^2 + 1 \\ f_2(x) = -2x^3 + 2x^2 + x - 1 \\ f_3(x) = x^3 - x^2 + x + 2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} g_1(x) = x^3 - 2x^2 - x + 1 \\ g_2(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 2 \\ g_3(x) = 3x^3 - 6x^2 + 4x + 3 \\ g_4(x) = 2x^3 + 6x^2 + 6x + 4 \\ g_5(x) = 4x^3 - 3x^2 + x + 5 \end{cases}$$
$$(3) H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, 3)$$

3.† 次の行列の①解空間、② 像空間について、それぞれの次元とその基底を求めよ．

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 13 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

4. 次の二組の基底  $[u]$ ,  $[\tilde{u}]$  に関する変換行列  $P$  を求めよ\*<sup>2</sup>．

$$(1) [u_1, u_2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{u}, \tilde{u}_2] = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$(2) [u_1, u_2, u_3] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -11 \\ 3 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad [\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 基底の変換行列  $P$  が必ず正則になることを示せ\*<sup>3</sup>．

6.†  $W$  をベクトル空間  $V$  の部分空間とする．このとき、次の二つの命題を証明せよ．

$$(1) \dim W \leq \dim V, \quad (2) \dim W = \dim V \text{ ならば, } W = V \text{ となる.}$$

---

10 月 31 日分 (凡例：無印は基本問題、† は特に解いてほしい問題、\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*<sup>1</sup> (3) の多項式を Hermite 多項式とよぶ．

\*<sup>2</sup>  $[\tilde{u}] = [u]P$  となる正則行列  $P$  を求める．

\*<sup>3</sup> ヒント：  $P$  の列ベクトルたちが線形独立となることを示せばよい．

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 5

- 1.†  $T: U \rightarrow V$  をベクトル空間  $U, V$  間の線形写像とするとき,  $\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(U)$  が成り立つことを次の方針に従って示せ. ここで  $r = \text{rank}(T)$ ,  $s = \text{null}(T)$  とおき,  $u_1, \dots, u_r$  を  $\text{Ker}(T)$  の基底,  $v_1, \dots, v_s$  を  $\text{Im}(T)$  の基底とする.
- (1)  $U$  の要素  $u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  で,  $T(u_{r+j}) = v_j$  かつ  $u_{r+j} \notin \text{Ker}(T)$  ( $j = 1, \dots, s$ ) をみたまものが存在することを示せ.
- (2)  $U$  の任意の元  $u$  は,  $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$  の線形結合で書けることを示せ\*<sup>1</sup>.
- (3)  $u_1, \dots, u_{r+s}$  は線形独立であることを示せ.
- 2.†  $U, V$  を一般のベクトル空間とし,  $T: U \rightarrow V$  はその間の線形写像とするとき,  $\text{Im}(T)$  は  $V$  の部分空間,  $\text{Ker}(T)$  は  $U$  の部分空間となることを示せ.
3. 次の行列  $A$  に対して, (a)  $T_A$  の退化次元と  $\text{Ker}(T_A)$  の基底, (b)  $T_A$  の階数と  $\text{Im}(T_A)$  の基底, をそれぞれ求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -5 & 5 & -5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -6 \\ -5 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

4. 次の写像は線形となるか調べよ.

$$(1) T_2: \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R} \quad (2) T_3: \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
$$(3) T_4: \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto \int_{-1}^1 p(t) dt \in \mathbb{R} \quad (4) T_5: \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto p(0) \in \mathbb{R}$$

5.  $V = \mathbb{R}[x]_3$  とし, 写像  $T: V \rightarrow V$  を  $T: p(x) \mapsto xp'(x) - 3p(x-1)$  により定義する. このとき, (i)  $T$  は線形写像となることを示せ. (ii)  $T$  の退化次元と階数をそれぞれ求めよ. (iii)  $\text{Im}(T)$  の基底を一組求めよ.
- 6.†  $V = M(2, \mathbb{C})$  を複素数を成分に持つ 2 次正方行列全体の空間とし,  $V$  上の写像  $\sigma$  を

$$\sigma(X) := {}^t \overline{X} \quad (\text{各成分の複素共役をとって行列として転置})$$

により定義する. さらに  $W := \{X \in V; \sigma(X) = X\}$  とおく.

- (i)  $\sigma$  は  $\mathbb{R}$  上では線形写像になるが,  $\mathbb{C}$  上では線形写像にならないことを示せ.
- (ii)  $W$  は  $V$  の ( $\mathbb{R}$  上のベクトル空間としての) 部分空間になることを示せ.
- (iii)  $W$  の次元と基底を求めよ.

---

11 月 7 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*<sup>1</sup> まず  $T(u)$  を考える.

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 6

1.  $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$  のとき, 以下の基底に関する  $T_A$  の表現行列をそれぞれ求めよ.
- (1)  $\mathbb{R}^3$  の基底は  $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$ ,  $\mathbb{R}^2$  の基底は  $\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ .
- (2)  $\mathbb{R}^3$  の基底は  $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$ ,  $\mathbb{R}^2$  の基底は  $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ .
- 2.†  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$  とする.  $\mathbb{R}^3$  の基底をいずれも次のものとするとき, この基底に関する  $T_A$  の表現行列をそれぞれ求めよ\*<sup>1</sup>.

$$(1) \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \quad (2) \left[ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

3.  $U = \mathbb{R}[x]_3$ ,  $V = \mathbb{R}[x]_2$  とし, 写像  $T: U \rightarrow V$  を  $T: p(x) \mapsto p'(2x+1)$  で定める\*<sup>2</sup>.
- (1)  $T$  は線形写像となることを示せ.
- (2)  $U, V$  の標準基底  $([x^2, x, 1])$  および  $[x, 1]$  に関する表現行列を求めよ.
- (3)  $U, V$  の基底がそれぞれ  $[(x+1)^2, x+1, 1], [x+1, 1]$  のとき, 表現行列を求めよ.
- 4.†  $V = \mathbb{R}[x]_2$  とし, その上の変換  $T$  を  $T: p(x) \mapsto (x+1)^2 \cdot p\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  により定める. このとき, 次の問いに答えよ.
- (1) 変換  $T$  は線形になることを示せ.
- (2)  $V$  の基底  $[x^2, x, 1]$  に関する変換  $T$  の表現行列  $A$  を求めよ.
- (3)  $T$  の階数と退化次元を求めよ.

- 5.\* 線形写像  $T: U \rightarrow V$  が全射・単射および全単射であることを次のように定義する:

全射  $\stackrel{\text{def}}{\iff}$  任意の  $V$  の元  $v$  に対して  $T(u) = v$  となる  $u \in U$  が存在する.

単射  $\stackrel{\text{def}}{\iff} U$  の任意の 2 元  $u, u'$  に対して  $T(u) = T(u')$  ならば  $u = u'$  となる.

全単射  $\stackrel{\text{def}}{\iff} T$  が全射かつ単射

また  $T$  が全単射であるとき  $U$  と  $V$  は同型であるという. 以下を示せ.

- (1)  $T$  が全射  $\iff \dim \text{Im } T = \dim V$       (2)  $T$  が単射  $\iff \ker T = \{0\}$
- (3) 任意の  $n$  次元実ベクトル空間  $U$  は,  $n$  次元数ベクトル空間  $\mathbb{R}^n$  と同型になる.

---

11 月 14 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*<sup>1</sup> つまり,  $T_A: U \rightarrow V$  としたとき,  $U = V$  なので, その基底として同じものをとる.

\*<sup>2</sup>  $p(x)$  を微分した  $p'(x)$  において,  $x \mapsto 2x+1$  としたもの.

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 7

1. 次の行列の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

2.<sup>†</sup> 次の行列の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ．

$$\begin{aligned} (1) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (4) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & (6) & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ -1 & -7 & -9 \end{pmatrix} \\ (7) & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix} & (8) & \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} & (9) & \begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.<sup>†</sup> 次の行列の固有値および対応する固有ベクトルを求めよ\*<sup>1</sup>．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列の固有多項式を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 3 次正方行列  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$  の固有多項式は、次の形をしていることを示せ．

$$g_A(t) = t^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + (|A_{11}| + |A_{22}| + |A_{33}|)t - \det A.$$

ただし、 $A_{ii}$  は  $i$  行  $i$  列に関する  $A$  の余因子である．

6.\*  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$  について、次の  $S, T$  を  $A$  の一次多項式で表わせ\*<sup>2</sup>．

$$(1) S = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37E_2 \quad (2) T = S^{-1}$$

---

11 月 21 日分 (凡例：無印は基本問題、<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題、\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*<sup>1</sup> 複素数の固有値が現れる例である．

\*<sup>2</sup> ヒント：Cayley-Hamilton の定理．

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 8

1. 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & 16 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- 2.<sup>†</sup>  $V = \mathbb{R}[x]_n$  ( $n$  は自然数) とし,  $T: V \rightarrow V$  を  $V$  上の線形変換とする．このとき, 次のような部分集合は  $V$  の部分空間となるか．なるのならばそれを証明し, ならないのであればその理由を述べよ．

$$(1) \operatorname{Im}(T) \quad (2) \operatorname{Ker}(T) \quad (3) W := \{p(x) \in V; T(p(x)) = x\}$$

3.  $V = \mathbb{R}[x]_1$  とする．次の線形変換  $T_1, T_2$  に対して, (i) 固有多項式, (ii) 固有値と対応する固有空間, をそれぞれ求めよ．

$$(1) T_1(p(x)) = xp'(x) \quad (2) T_2(p(x)) = p'(x) + p(0)x$$

4.  $a, b$  を任意の実数 (ただし  $a \neq 0, 1, b \neq 0$ ) とする．また, 自然数  $n = 1, 2, 3, \dots$  に対して  $\mathbb{R}[x]_n$  上の線形変換  $T_n$  を,  $T_n(p(x)) := p(ax + b)$  により定義する．

(1)  $n = 1$  のとき,  $T_1$  の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

(2)<sup>†</sup>  $n = 2$  のとき,  $T_2$  の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

(3)\* 一般の  $n$  に対して,  $T_n$  の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

- 5.<sup>†</sup>  $V = \mathbb{R}[x]_2$  とする． $V$  上の線形変換  $T$  の, 標準基底  $[x^2, x, 1]$  に関する表現行列  $A$  が次で与えられているとき,  $T$  の固有値および対応する固有空間をそれぞれ求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 0 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & -21 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

6.  $A, B$  を  $n$  次正方行列とし, さらに  $A$  は正則行列と仮定する<sup>\*1</sup>．このとき,  $AB$  の固有多項式と  $BA$  の固有多項式は一致することを示せ<sup>\*2</sup>．

---

12 月 12 日分 (凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*1 実はこの仮定は不要である．

\*2 よって, 特にそれぞれの固有値は重複度を込めて一致する．



# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 9

1. 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix}$$
$$(5) \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

2<sup>†</sup> 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は対角化できないことを，直接計算することにより示せ．<sup>\*1</sup>

3<sup>†</sup> 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

4.  $A$  を対角化可能な  $n$  次正方行列とし， $A$  の互いに異なる固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ ，それぞれの重複度を  $m_1, \dots, m_r$  と書く<sup>\*2</sup>．このとき，次が成り立つことを示せ<sup>\*3</sup>．

$$(1) \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i \quad (2) \det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i}$$

5<sup>†</sup> 行列  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  を考える． $A$  を対角化することにより，その  $n$  乗  $A^n$  を求めよ．  
また，数列  $f_n$  を次の関係式で定めるとき， $f_n$  の一般項を， $A^n$  を用いて求めよ．

$$f_1 = f_2 = 1, \quad \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

6. 講義における定理 9.6 を証明せよ．すなわち， $n$  次正方行列  $A$  の相異なる実固有値を  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  とするとき， $A$  が  $\mathbb{R}$  上で対角化可能ならば， $\sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; A) = n$  となることを示せ．

7.\* 講義における命題 9.5 を証明せよ．

---

12 月 20 日分 (凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

<sup>\*1</sup> 対角化できるとすると，ある対角行列  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  と正則行列  $P$  を用いて  $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP$  を満たすはずだが，そのような  $P, D$  が存在しないことを示す．

<sup>\*2</sup>  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$  のとき， $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$  である．また， $\prod_{i=1}^n a_i = a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n$  である．

<sup>\*3</sup> 実は任意の正方行列で成り立つ．

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 10

多項式空間における標準内積を  $(p|q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$  とする.

1<sup>†</sup> 次の  $\mathbb{R}[x]_2$  の 2 本の多項式と直交する多項式を, それぞれ一つずつ求めよ.

- (1)  $p(x) = 4x^2 + 1$ ,  $q(x) = x^2$ . (2)  $p(x) = x - 1$ ,  $q(x) = x$ .  
(3)  $p(x) = 2x - 1$ ,  $q(x) = x^2$ . (4)  $p(x) = 2x + 3$ ,  $q(x) = x^2 + x + 1$ .

2.  $n$  次正方形行列全体のなすベクトル空間  $M(n, \mathbb{R})$  において,  $\langle A|B \rangle := \text{tr}({}^t A B)$  ( $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ ) とするとき,  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  は内積の性質を満たすことを確認せよ.

3.  $V = \mathbb{R}[x]_2$  とし, 内積の定義において積分範囲を  $[0, 1]$  に変更したものを考える:

$$\langle p|q \rangle_0 := \int_0^1 p(x)q(x) dx \quad (p, q \in V).$$

このとき,  $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$  も内積の性質を満たすことを確認せよ. また多項式  $p, q$  に対して, 標準内積での値  $\langle p|q \rangle$  と, この内積での値  $\langle p|q \rangle_0$  が異なることを確認せよ.

4<sup>†</sup> 区間  $[-1, 1]$  上の (連続とは限らない) 実数値関数全体のなす空間  $V$  はベクトル空間となる. このとき, 次で定義される  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  は  $V$  の内積となるか:

$$\langle f|g \rangle := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (f, g \in V).$$

5<sup>†</sup> 内積空間  $V$  の部分空間  $W$  に対して,  $V$  の部分集合  $W^\perp$  を次のように定義する:

$$W^\perp := \{v \in V; \text{すべての } w \in W \text{ に対して } \langle v|w \rangle = 0\}.$$

(1)  $W^\perp$  は  $V$  の部分空間となることを示せ<sup>\*1</sup>. (2)  $W \cap W^\perp = \{0_V\}$  を示せ.

6<sup>†</sup>  $I = [-\pi, \pi]$  とする.  $I$  上の滑らかな関数全体のなすベクトル空間  $C^\infty(I)$  において,  $\langle f|g \rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$  は内積になる. 整数  $n, m \geq 1$  に対して  $s_n(x) := \sin nx$ ,  $c_m(x) := \cos mx$  とおくと, 次の内積の値を計算せよ<sup>\*2</sup>.

$$(1) \langle s_n | c_m \rangle \quad (2) \langle s_n | s_m \rangle \quad (3) \langle c_n | c_m \rangle$$

---

1 月 9 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

<sup>\*1</sup> この  $W^\perp$  を,  $W$  の  $V$  における直交補空間という.

<sup>\*2</sup> (2), (3) は  $n = m$  かどうかで場合分けが必要.

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 11

1. 次の  $\mathbb{R}^2$  の基底  $(v_1, v_2)$  を Gram-Schmidt の直交化法により直交化せよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

- 2.† 次の  $\mathbb{R}^3$  の基底  $(v_1, v_2, v_3)$  を Gram-Schmidt の直交化法により直交化せよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 3.† 次の  $\mathbb{R}[x]_2$  の基底を Gram-Schmidt の直交化法により直交化せよ . ただし内積は

$$\langle f | g \rangle = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \text{ とする .}$$

$$(1) p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2.$$

$$(2) q_1(x) = x^2, q_2(x) = x, q_3(x) = 1.$$

$$(3) r_1(x) = -x, r_2(x) = -x^2 + x, r_3(x) = -x^2 + x - 1.$$

4.  $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底は次の形のものと尽くされることを示せ .

$$(1) u_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) v_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

5. 2 次の直交行列をすべて求めよ .

- 6.† 任意の 3 次正則行列  $A$  は , ある直交行列  $P$  と上三角行列  $U$  を用いて  $A = PU$  という積でかけることを示せ\*<sup>1</sup> .

- 7.\* 整数  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  に対して  $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right)$  とおく\*<sup>2</sup> . また , 二つの多項式  $f, g$  に対して  $\langle f | g \rangle_H := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$  とする\*<sup>3</sup> .

$$(1) n = 0, 1, 2, 3, 4 \text{ に対して } H_n(x) \text{ を求めよ .}$$

$$(2) \text{ 各 } H_n(x) \text{ は } n \text{ 次の多項式となることを示せ .}$$

$$(3) \langle \cdot | \cdot \rangle_H \text{ は } \mathbb{R}[x]_n \text{ ( } n \text{ は任意の自然数 ) の内積を定めることを示せ .}$$

$$(4) \text{ この内積 } \langle \cdot | \cdot \rangle_H \text{ に関して , 多項式 } H_n(x) \text{ ( } n = 0, 1, 2, \dots \text{ ) は互いに直交していることを示せ .}$$

---

1 月 16 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , † は特に解いてほしい問題 , \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*<sup>1</sup> ヒント : Gram-Schmidt の直交化法 . これは任意の  $n$  次正則行列で成り立つ .

\*<sup>2</sup> この多項式を Hermite 多項式という .

\*<sup>3</sup> 重み  $e^{-x^2}$  を持つ積分である .

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 12

1. 2 次の回転行列  $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  が, 任意の  $x \in \mathbb{R}^2$  に対して  $\|P(\theta)x\| = \|x\|$  を満たすことを直接確かめよ.
- 2.<sup>†</sup> 次の 3 次実対称行列は正定値かどうか調べよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3.  $X$  を  $n$  次の実交代行列, すなわち  ${}^tX = -X$  を満たす  $n$  次正方行列とする.
- (1)  $X$  の固有値は常に純虚数もしくは 0 になることを示せ.
- (2)  $\lambda i$  が  $X$  の固有値とすると, その複素共役  $-\lambda i$  も  $X$  の固有値となることを示せ.
- (3)  $n$  が奇数のとき,  $\det X = 0$  となることを示せ.
- 4.<sup>†</sup> 2 次対称行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  に対して, (1)  $A$  が正定値であることと, (2)  $a > 0$  かつ  $ac - b^2 > 0$  を満たすことが同値であることを示せ.
- 5.<sup>†</sup> 任意の 2 次正定値対称行列  $A$  は, 適当な下三角行列  $L$  を用いて  $A = L^t L$  とかけることを示せ. 対角成分を正に取ることにすれば, この下三角行列  $L$  は一意に定まる<sup>\*1</sup>.
6.  $A$  を  $n$  次対称行列とし,  $X$  を  $n$  次交代行列とする. このとき, 常に  $\text{tr}(AX) = 0$  となることを示せ<sup>\*2</sup>.
- 7.\*  $\lambda, \mu > 0$  とし,  $\mathbb{R}^2$  において  $\langle x|y \rangle_0 := \lambda x_1 y_1 + \mu x_2 y_2$  により  $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$  を定義する.
- (1)  $\langle \cdot | \cdot \rangle_0$  は  $\mathbb{R}^2$  の内積を定めることを示せ.
- (2) この内積に関する転置行列  $\tilde{X}$  を<sup>\*3</sup>, 通常の転置行列を用いて表せ.
- (3) この内積に関する直交行列 (以下を満たす行列  $P$ ) はどのような条件を満たすか.

$$\text{任意の } x, y \text{ に対して } \langle Px|Py \rangle_0 = \langle x|y \rangle_0.$$

- 8.\* 2 次正則行列  $A$  に対して  $\mathbb{R}^2$  の有界な領域における変数変換  $u \mapsto x = Au$  を考える. この変換の Jacobian を求めよ. また,  $A$  が直交行列ならば Jacobian は常に 1 となることを確認せよ.

---

1 月 24 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

<sup>\*1</sup> このような分解を Gauss 分解もしくは Cholesky 分解という (分野によって呼び方が異なる). なお, この分解は任意の次数の正定値な実対称行列に対して成立する.

<sup>\*2</sup> 任意の行列  $M$  に対して  $\text{tr}(M) = \text{tr}({}^tM)$  が成り立つことを用いる.

<sup>\*3</sup> 任意の  $x, y \in \mathbb{R}^2$  に対して  $\langle Xx|y \rangle_0 = \langle x|\tilde{X}y \rangle_0$  を満たす 2 次正方行列  $\tilde{X}$  のこと.

# 線形代数学・同演習 B

## 演習問題 13

1. 次の 2 次対称行列を直交行列により対角化せよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2<sup>†</sup> 次の 3 次対称行列を直交行列により対角化せよ\*<sup>1</sup> .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$
$$(4) \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3\*  $n$  変数 2 次同次多項式  $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$  を 2 次形式という .

(1) 任意の 2 次形式  $f$  はある対称行列  $A$  を用いて  $f(x) = {}^t x A x$  と表せることを示せ .

(2) (1) の行列  $A$  を 2 次系式  $f$  の表現行列という . 基底変換  $y = Sx$  により  $f$  を  $y$  の 2 次形式と思うと , その表現行列は  ${}^t S A S$  となることを示せ .

(3) 任意の 2 次系式は , 直交座標変換で  $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$  という形に変換できることを示せ .

4\* 次の積分を以下の二通りの方法で計算せよ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)^{*2}.$$

(1) 対称行列の直交行列による対角化を用いる .

(2) 正定値対称行列  $A$  は下三角行列  $L$  により  $A = L {}^t L$  と書けることを用いる .

5\* 正方行列  $A$  に対して , 指数写像  $\exp$  を  $\exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$  により定義する . このとき , 次の行列を指数写像で写したものを求めよ .

$$(1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

1 月 30 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題 , \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

\*<sup>1</sup> 少なくとも (1), (2) は確実に計算できるようになっておくこと .

\*<sup>2</sup> ヒント:  $ax^2 + 2bxy + cy^2 = {}^t x A x$  と考える . また (2) のような分解を Gauss 分解あるいは Cholesky 分解という (分野で呼び方が違う) .