

はじめに

- ・線形代数学・同演習 B（九州大学，2017 年後期）
- ・講義担当者 中島秀斗

講義進度が教科書の順番と異なるので，予習用に講義ノートを作りました．1 コマ 1 ページに収まるように定理等の証明や例題の解答は適宜省略しています．講義の進行に合わせて範囲などが変更になる場合がありますので，その点ご注意ください．

この講義の目標は，前半においては抽象的な議論に慣れることおよび具体例を通してベクトル空間を理解して基底・次元など重要な概念を習得することであり，後半においては行列の固有値・固有ベクトルについて理解を深めることおよび実対称行列の対角化ができるようになることです．そのどれも今後の専門教科の講義の基本となるものですので，じっくり時間を掛けて修得してください．

目次

1	ベクトル空間	1
2	ベクトル空間の次元と基底 1	2
3	ベクトル空間の次元と基底 2	3
4	ベクトル空間の次元と基底 3	4
5	線形写像	5
6	線形写像 2	6
7	線形変換と行列の固有値	7
8	線形変換の固有値と固有ベクトル	8
9	行列の対角化	9
10	内積空間	10
11	正規直交基底	11
12	対称行列	12
13	対称行列の対角化	13

参考文献

- [1] 斎藤正彦，「線型代数学」，東京図書
- [2] 三宅敏恒，「入門線形代数」，培風館
- [3] 金子晃，「線形代数講義」，サイエンス社
- [4] 野村隆昭，「微分積分学講義」，共立出版

1 ベクトル空間

連立一次方程式を解く際など、 \mathbb{R}^n の線形演算 (和とスカラー倍) が重要だった。後期は「ある集合が線形演算を持つことのみを仮定して何がわかるか」について考える。

今まで: 特定の集合の性質を調べる。

これから: 特定の性質を持つ集合を一括して扱う。

1.1 集合

集合とはものの集まりであり、明確な基準があるもの。

- 10 以下の自然数
- × 細長い三角形全体

集合を構成しているものを「要素」または「元」という。

例. \mathbb{N} : 自然数全体 = $\{1, 2, 3, \dots\}$ \mathbb{R} : 実数全体

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

部分集合の記法

$\{x \in X; \text{~~~~~}\} \rightarrow X$ に属するもののうち ~~~~~ という条件を満たすもの全体。

例. $\{x \in \mathbb{R}^2; \|x\|^2 = 1\}$ は平面上の円上にある点全体を表す。

1.2 ベクトル空間の定義

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ or } \mathbb{C}$ とする*1。

定義 1.1. 集合 V が \mathbb{K} 上のベクトル空間とは「和」と「スカラー倍」が定義されており、それらが分配法則を満たすこと*2。

注意 1.2. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ なら実ベクトル空間、 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ なら複素ベクトル空間という。重要なのは「和」と「スカラー倍」で「閉じている」こと。つまり

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V, \quad \lambda \mathbf{v} \in V \quad (\lambda \in \mathbb{K}, \mathbf{v} \in V).$$

ベクトル空間の例

- (1) $V = \mathbb{K}^n$ は通常の演算でベクトル空間
- (2) $V = M(m, n; \mathbb{K})$ は通常の行列の演算でベクトル空間になる*3。また $m = n$ のときは $M(n, \mathbb{K})$ とかく。

*1 \mathbb{K} は数学用語である体のドイツ語 Körper から。

*2 分配法則とは $\lambda(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \lambda\mathbf{u} + \lambda\mathbf{v}$ および $(\lambda + \mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} + \mu\mathbf{v}$ のこと。詳しい定義は教科書等を参考のこと。

*3 $M(m, n; \mathbb{K}) = \{\mathbb{K} \text{ の元を成分に持つ } m \times n \text{ 行列全体}\}$

注意 1.3. (1) V は必ず零元 0_V を持つ*4。

(2) V がベクトル空間であることを確かめるには、① 和に関して「零元 0_V の存在」、 $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$ 、② スカラー倍に関して「 $\lambda\mathbf{v} \in V$ 」を調べる。後半二つは「 $\lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in V$ 」に纏められる*5。

例 1.4. $C(a, b) = \{ \text{区間 } (a, b) \text{ で連続な実数値関数全体} \}$ とする。 $f, g \in C(a, b)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、和 $f + g$, スカラー倍 λf を、それぞれ

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) := \lambda \cdot f(x)$$

と定義すれば、 $C(a, b)$ は \mathbb{R} 上のベクトル空間。

注意 1.5. 考える空間によって記号が変わる。

一般のベクトル空間 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$

\mathbb{K}^n $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$

$M(m, n; \mathbb{K})$ A, B, \dots

$C(a, b)$ f, g, \dots

補題 1.6. $\forall \mathbf{v} \in V$ に対して $0 \cdot \mathbf{v} = 0_V$ 。(証明略)

1.3 線形部分空間

定義 1.7. ベクトル空間 V の部分集合 $W \neq \emptyset$ が V の和とスカラー倍によってベクトル空間となるとき W を V の (線形) 部分空間という。

例. $V = \mathbb{R}^3$ とする。 $W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}; x, y \in \mathbb{R} \right\}$ は \mathbb{R}^3 の部分空間。これは \mathbb{R}^3 空間における xy 平面である。

命題 1.8. $W \subset V$ が部分空間であることの必要十分条件は $\begin{cases} \text{(i)} & \mathbf{u}, \mathbf{v} \in W \Rightarrow \lambda\mathbf{u} + \mu\mathbf{v} \in W \\ \text{(ii)} & 0_V \in W \end{cases}$

例題 1.9. 次は \mathbb{R}^2 の部分空間になるか調べよ。

- (1) $W_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y = 0\}$
- (2) $W_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(考え方) 命題 1.9 を利用する。解答略。

まとめ (1) ベクトル空間とは「和」と「スカラー倍」を持つ集合のこと。(2) 具体例: \mathbb{R}^n , $M(n, \mathbb{R})$, 関数や多項式の空間など。(3) 部分空間は、ベクトル空間の部分集合で、それ自身がベクトル空間の構造を持つもの。

*4 零元 0_V とは $\forall \mathbf{v} \in V$ に対して $\mathbf{v} + 0_V = \mathbf{v}$ を満たすもの。

*5 本来はもっと多くのことを確認する必要があるが、この講義においてはこの程度で十分である。

2 ベクトル空間の次元と基底 1

ベクトル空間とは、「和」と「スカラー倍」が定義された集合のことであった。

典型例 \mathbb{R}^n と \mathbb{C}^n

その他の重要な例 $M(m, n; \mathbb{K}), C(\mathbb{R}),$
 $\mathbb{R}[x]_n$ (n 次以下の多項式全体)

ベクトル空間において重要な概念である「次元」と「基底」を導入する。

2.1 線形独立性

V : ベクトル空間 / \mathbb{K} *6

定義 2.1. $v_1, \dots, v_s \in V$ に対して

- 線形独立: $x_1 v_1 + \dots + x_s v_s = 0_V$ ならば $x_1 = \dots = x_s = 0$ を満たす。
- 線形従属: v_1, \dots, v_s は線形独立でない。

線形独立・従属はベクトルの組に対する概念であり、ベクトルの組の中に余分なものがどれだけあるかを表す。

注意 2.2. $V = \mathbb{R}^n$ ならば、線形独立は連立一次方程式 $x_1 a_1 + \dots + x_s a_s = 0$ が自明な解 $x = 0$ しか持たないことと同じ。

線形独立・従属の例 $V = \mathbb{R}^n$ とする。

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく*7。

- (1) e_1, \dots, e_s ($s \leq n$) は線形独立。
- (2) $e_1, e_2, e_1 + e_2$ は線形従属。実際、

$$1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + (-1)(e_1 + e_2) = 0.$$

このように、線形従属なベクトルの組には余分なものが含まれている。

命題 2.3. u_1, \dots, u_s が線形独立のとき、

$$x_1 u_1 + \dots + x_s u_s = y_1 u_1 + \dots + y_s u_s$$

ならば、 $x_1 = y_1, \dots, x_s = y_s$ 。(証明略)

つまり、線形独立なベクトルの組は \mathbb{R}^n における e_1, \dots, e_n のような役割ができる*8。

*6 \mathbb{K} 上の、という意味。

*7 e_1, \dots, e_n を \mathbb{R}^n の基本ベクトルと呼ぶ。

*8 つまり、任意の元をそれらの線形結合で表す事ができる(ことが期待される)。

例題 2.4. 次の 3 つのベクトルは線形独立か。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(考え方) 方程式 $x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 = 0$ を解いて、その解が $x = 0$ のみならば線形独立、非自明なものがある*9ならば線形従属、になる。(解答略)

命題 2.5. u_1, \dots, u_s が線形独立かつ u, u_1, \dots, u_s が線形従属ならば、 $u = c_1 u_1 + \dots + c_s u_s$ ($c_j \in \mathbb{K}$) と書ける。(証明略)

命題 2.6. V の二つのベクトルの組 u_1, \dots, u_r および $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_s$ に対し、(1) 各 \tilde{u}_j はそれぞれ u_1, \dots, u_r の線形結合でかける、(2) $s > r$ 、ならば $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_s$ は線形従属になる*10。

(略証) $x_1 \tilde{u}_1 + \dots + x_s \tilde{u}_s = 0_V$ を考える。条件 (1) から

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1s} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rs} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = 0$$

を考えれば良いことがわかる。これは同次系の連立一次方程式なので常に解を持ち、さらに条件 (2) からパラメータを持つことがわかる。つまりこの方程式は非自明な解を持つので、 $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_s$ は線形従属。□

注意 2.7. $s = r$ のときは係数行列 A と u_1, \dots, u_r 次第である。 $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_r$ が線形独立になるのは、「 A が正則」かつ「 u_1, \dots, u_r が線形独立」のときに限る。

例題 2.8. u_1, \dots, u_4 が線形独立のとき、次のベクトルの組 $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_4$ は線形独立か。

$$\begin{cases} \tilde{u}_1 = u_1 - u_2 + 3u_3 \\ \tilde{u}_2 = 2u_1 - u_2 + 6u_3 + u_4 \\ \tilde{u}_3 = 2u_1 - 2u_2 + u_3 - u_4 \\ \tilde{u}_4 = u_1 - u_3 + 3u_4 \end{cases}$$

(考え方) 線形独立性を調べるときは、 $x_1 \tilde{u}_1 + \dots + x_4 \tilde{u}_4 = 0$ において、その解がパラメータを持つかどうかを見る。持たなければ線形独立、持てば線形従属。
 まとめ (1) 線形独立と線形従属、(2) 線形独立なベクトルの組は、ベクトルを表す際の座標軸の候補になる。

*9 つまり、パラメータを持つ。

*10 この命題では、 u_1, \dots, u_r の線形独立性は仮定していない。

3 ベクトル空間の次元と基底 2

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = xe_1 + ye_2 + ze_3$ と書ける．つまり， \mathbb{R}^3 の元は線形独立なベクトルの組 e_1, e_2, e_3 の線形結合として，一意的に表現できる．

3.1 基底

定義 3.1. W を \mathbb{K} 上のベクトル空間 V の部分空間とする． W の任意の元がベクトル u_1, \dots, u_n の線形結合としてかけるとき， u_1, \dots, u_n は W を張る，という．

例． $e_1, e_2, e_1 + e_2 \in \mathbb{R}^2$ は \mathbb{R}^2 を張る．実際， $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x - z)e_1 + (y - z)e_2 + z(e_1 + e_2)$ ．しかし，この表現には無駄がある．

定義 3.2. u_1, \dots, u_n が (1) u_1, \dots, u_n は線形独立，(2) u_1, \dots, u_n は V を張る，を満たすとき， V の基底という．また， e_1, \dots, e_n を \mathbb{R}^n の標準基底という．

注意 3.3. V の任意の元 v を $v = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ ($x_j \in \mathbb{K}$) と一意的に表現することができる．

例題 3.4. ベクトルの組 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ， $a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ， $a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ が \mathbb{R}^3 の基底をなすことを示せ．

(考え方) \mathbb{R}^3 の任意の元 b に対して $b = x_1a_1 + x_2a_2 + a_3 = Ax$ となる x がただ一つだけ存在することをいえばよい．解答は省略．

定理 3.5. ベクトル空間 V の基底はたくさん存在する．しかし，基底を構成するベクトルの本数は基底のとり方に依らず一定である．(証明略)

定義 3.6. ベクトル空間 V の基底を構成するベクトルの本数を V の次元といい， $\dim V$ で表す．

例．(1) $V = \mathbb{R}^n$ ならば e_1, \dots, e_n が基底になり， $\dim \mathbb{R}^n = n$ ．(2) $V = \mathbb{R}[x]_2$ ならば $1, x, x^2$ が基底になり， $\dim \mathbb{R}[x]_2 = 3$ ．

つまり，次元とはベクトル空間を表現する際に必要となる「座標軸の本数」である．

注意 3.7. どんな自然数 n に対しても線形独立な n 本のベクトルの組が存在するとき， V を無限次元のベクトル空間といい， $\dim V = \infty$ とかく．例えば $V = \mathbb{R}[x]$ (多項式全体の空間) としたとき，各 n に対して $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$ は線形独立．

3.2 ベクトルの表記

u_1, \dots, u_n を V の基底とすると，任意の $v \in V$ は $v = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$ と書ける．特に $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ は一意に定まる．これを

$$v = [u_1, \dots, u_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表す．これを $v \in V$ の数ベクトル表示という．これによりベクトル空間 V を数ベクトル空間 \mathbb{K}^n と思うことができる．

例 3.8. $V = \mathbb{R}[x]_2$ において $p(x) = ax^2 + bx + c$ を考える．二つの基底 $[x^2, x, 1]$ および $[1, x, x^2]$ に対して，

$$p(x) = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [1, x, x^2] \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

このように，基底のとり方や順番により対応する数ベクトルが変わる．

二つの基底 u_1, \dots, u_n および $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ に関して，

$$v = [u_1, \dots, u_n] \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n] \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

と書いたとき， x と y と間の関係を調べる．(中略)．ある正則行列 P が存在して， $x = Py$ となる．

定義 3.9. この行列 P を基底の変換行列という．

例題 3.10. 次の二つの \mathbb{R}^2 の基底 $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ， $[\tilde{u}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の変換行列 P を求めよ．

注意 3.11. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [\tilde{u}] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $[u]$ という基底で書くと，

$$[u]P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [u] \begin{pmatrix} \frac{x+y}{2} \\ \frac{x-y}{2} \end{pmatrix}$$

とすれば良いことがわかる．また， $V = \mathbb{K}^n$ ならば (行列と思って) $P = ([u])^{-1}[\tilde{u}]$ となる．

まとめ (1) 基底はベクトル空間の要素を表す座標軸，次元はその本数を表す．(2) 基底を一つ固定すれば数ベクトルのように扱うことができる．(3) しかし，基底を変えると表現する数ベクトルが変わる．それを調整するのが変換行列．

4 ベクトル空間の次元と基底 3

4.1 部分空間

記号 4.1. v_1, \dots, v_s で張られる V の部分空間を次のように表す. v_1, \dots, v_s は線形独立でなくてもよい.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_s) := \{x_1 v_1 + \dots + x_s v_s; x_j \in \mathbb{K}\}.$$

例題 4.2. $V = \mathbb{R}^3$ とし, a_1, \dots, a_4 を次で定めるとき, $W = \text{Span}(a_1, \dots, a_4)$ の基底を一組求めよ.

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(考え方) 基底とは, ① 空間を張る② 線形独立なベクトルの組であった. 今の場合① は分かっている② ベクトルの組の中で線形独立なものを抜き出せばよい. (解答略)

注意 4.3. 部分空間 $W \subset V$ に対して, $\dim W = \dim V$ ならば $W = V$ となる.

例題 4.4. 次の多項式で張られる $\mathbb{R}[x]_2$ の部分空間 W の基底を一組求めよ.

$$\begin{aligned} p_1(x) &= x^2 - x - 2, & p_2(x) &= 2x^2 + x + 1, \\ p_3(x) &= -x^2 - 2x - 3, & p_4(x) &= 4x^2 - x - 3. \end{aligned}$$

(考え方) 一般のベクトル空間においては, 基底を一組決めて, その基底に関する数ベクトル表示を利用する. 最後に元の表示に戻すことを忘れないように. (解答略)

注意 4.5. 与えられたベクトルの組が基底になることを示すには, 上のように構成した行列が正則行列になることを示せばよい.

4.2 重要な部分空間

この節では $V = \mathbb{K}^n$ とする.

定義 4.6. A を $m \times n$ 行列とする.

$$\ker A := \{x \in \mathbb{K}^n; Ax = 0\}$$

を連立一次方程式 $Ax = 0$ の解空間, または行列 A の核 (kernel) という. これは \mathbb{K}^n の部分空間である.

例題 4.7. 次の解空間の次元と基底を求めよ.

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^5; \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 8x_5 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

(考え方) この問題は「連立一次方程式 $Ax = 0$ を解け」という問題をベクトル空間の言葉で書き換えただけである^{*11}. この方程式の解が $x = t_1 a_1 + \dots + t_q a_q$ ならば, a_1, \dots, a_q が基底で, $\dim W = q$ となる. (解答略)

定義 4.8. A を $m \times n$ 行列とすると,

$$\text{Im } A := \{Ax \in \mathbb{K}^m; x \in \mathbb{K}^n\}$$

を A の像 (Image) という. これは \mathbb{K}^m の部分空間.

$A = (a_1, \dots, a_n)$ とかけば, $Ax = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ なので, $\text{Im } A$ は「 a_1, \dots, a_n で張られる部分空間」.

例題 4.9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & -4 & 3 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ に対して, $\text{Im } A \subset \mathbb{R}^2$ の次元と基底を求めよ.

(考え方) 与えられた行列を簡約化すればよい. 基底として, 主成分がある列のベクトルが取れる.

注意 4.10. $m \times n$ 行列 A に対して, いつも二つの部分空間 $\ker A \subset \mathbb{K}^n$ および $\text{Im } A \subset \mathbb{K}^m$ を構成できる. ここで, 先程の例題の議論より,

$$\begin{aligned} \dim \ker A &= (Ax = 0 \text{ の解のパラメータの数}) \\ &= n - \text{rank } A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dim \text{Im } A &= (A \text{ の簡約化の主成分の数}) \\ &= \text{rank } A \end{aligned}$$

なので, 常に $n = \dim \ker A + \dim \text{Im } A$ という関係式が成り立つ (次元公式).

まとめ (1) 幾つかのベクトルで張られる部分空間, (2) 行列における解空間と像, (3) 数ベクトル空間の次元公式. (予告) この節では $V = \mathbb{K}^n$ に制限し, 行列 A に対して幾つかの重要な部分空間を考えた. 行列は「線形写像」という側面も持っていたことを思い出そう. 次回は一般のベクトル空間にも「線形写像」を導入して, この節で扱ったことと並行した議論を行えることを紹介する. 物理学, 特に量子力学においては, 線形写像は非常に重要な位置を占めている. その舞台は無限次元のベクトル空間なのであるが, その考え方の基礎にあるのは有限次元ベクトル空間の理論である.

^{*11} ある問題を別の視点から見直すことにより, 今までよりも深く考察することができるようになる. はじめは戸惑うかもしれないが, 今までのどの概念と対応しているかということだけでもちゃんと把握しておくようにしておくとよい.

5 線形写像

5.1 線形写像の定義

定義 5.1. X, Y を集合とする. X の元 x に対して Y の元 y を対応させる規則 f のことを, X から Y への写像という.

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$: 関数 \subset 写像

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: 多変数関数 \subset 写像

$f: X \rightarrow Y$: 写像 (X, Y は一般の集合)

U, V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とする.

定義 5.2. 写像 $T: U \rightarrow V$ が (\mathbb{K} 上の) 線形写像であるとは, ① $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$ ($u_1, u_2 \in U$), ② $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u)$ ($\lambda \in \mathbb{K}, u \in U$) を満たすこと.

注意 5.3. 2つをまとめて $T(\lambda \cdot u_1 + \mu \cdot u_2) = \lambda \cdot T(u_1) + \mu \cdot T(u_2)$ ともかける. つまり, 線形結合に関して写像 T を「分配」できるということ.

例. (1) $U = \mathbb{R}^3, V = \mathbb{R}^2, A: 2 \times 3$ 行列. このとき, 写像 $T_A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を (標準基底に関して) $T_A(x) := Ax$ で定めると, これは線形写像になる. (2) 多項式の空間において, 微分するという写像 $\frac{d}{dx}: p(x) \mapsto p'(x)$ も線形写像である.

線形写像でない例. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x, y) := xy$ により定義すると, $f(\lambda(x, y)) = \lambda^2 xy = \lambda^2 f(x, y)$ なので条件 ② を満たさない. よってこの写像 f は線形写像でない.

注意 5.4. (1) 写像 $O: U \ni u \mapsto 0_V \in V$ は常に線形写像. これを零写像という. (2) 線形写像 $T: U \rightarrow V$ は U の零元 0_U を V の零元 0_V にうつす.

5.2 線形写像の像と核

定義 5.5. $T: U \rightarrow V$: 線形, に対して,

T の像 $\text{Im } T := \{T(u); u \in U\} \subset V$,

T の核 $\text{Ker } T := \{u \in U; T(u) = 0_V\} \subset U$.

注意 5.6. $T = T_A$ のとき $T_A(x) = Ax$ なので $\text{Im } T_A = \text{Im } A$ であるし, $\text{Ker } T$ についても $T_A(x) = Ax = 0$ を満たす x の集合なので $\text{Ker } T_A = \text{ker } A$ である. つまりこれらは行列に於ける Im および ker の一般化である.

命題 5.7. (1) $\text{Im } T$ は V の部分空間, (2) $\text{Ker } T$ は U の部分空間.

(考え方) $W = \text{Im } T$ または $\text{Ker } T$ として, 示すことは

「 $w_1, w_2 \in W$ ならば $\lambda \cdot w_1 + \mu \cdot w_2 \in W$ 」である.

定義 5.8. $T: U \rightarrow V$: 線形, に対して,

T の階数 $\text{rank } T := \dim \text{Im } T$

T の退化次元 $\text{null } T := \dim \text{Ker } T$

$T = T_A$ のとき, $\text{Ker } T_A = \text{ker } A$ なので,

$\text{null } T_A = \dim \text{ker } A$
 $= (Ax = 0 \text{ の解のパラメータの数}),$

$T_A(x) = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ なので,

$\text{rank } T_A = \dim \text{Im } T_A = \dim \text{Span}(a_1, \dots, a_n)$
 $= (A \text{ を簡約化した時に現れる主成分の数})$
 $= \text{rank } A.$

例題 5.9. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -1 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ に対して,

(1) T_A の退化次元と, $\text{Ker } T_A$ の基底を一組与えよ.

(2) T_A の階数と, $\text{Im } T_A$ の基底を一組与えよ.

(考え方) $\text{Ker } T_A$ は $Ax = 0$ の解, $\text{Im } T_A$ は $\text{Span}(a_1, \dots, a_n)$ と一致する. よって, まずは A を簡約化する. (解答略)

注意 5.10. 一般のベクトル空間においては, 基底を一つ決めて, その基底に対応する数ベクトル表示を利用する. 最後に元の形に戻すことを忘れないように.

この例題においても $\text{rank } T_A + \text{null } T_A = 3 + 2 = 5$ (5 は T_A の送り元の空間の次元) が成立している. 実はこの性質は一般の線形写像に対して成り立つ.

定理 5.11 (次元公式). $T: U \rightarrow V$: 線形, のとき

$$\text{rank } T + \text{null } T = \dim U.$$

行列の言葉でいえば,

(主成分の数) + (パラメータの数) = (列の総数).

6 線形写像 2

二つの K 上のベクトル空間 U, V を結ぶ線形写像 $T: U \rightarrow V$ は

$$T(x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \mathbf{u}_n) = x_1 T(\mathbf{u}_1) + \cdots + x_n T(\mathbf{u}_n)$$

を満たすので、基底の行き先が分かればすべて決まる。

6.1 線形写像の行列表現

U の基底を $[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$, V の基底を $[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ とする^{*12}。 U の基底の行き先を

$$\begin{aligned} T(\mathbf{u}_1) &= a_{11}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{m1}\mathbf{v}_m = [\mathbf{v}] \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ T(\mathbf{u}_n) &= a_{1n}\mathbf{v}_1 + \cdots + a_{mn}\mathbf{v}_m = [\mathbf{v}] \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

とすると、 $\mathbf{u} = x_1 \mathbf{u}_1 + \cdots + x_n \mathbf{u}_n$ は

$$T(\mathbf{u}) = \sum_{i=1}^n x_i T(\mathbf{u}_i) = [\mathbf{v}] \left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{a}_i \right) = [\mathbf{v}] (A\mathbf{x})$$

となる。つまり、 $T: \mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ と考える。

定義 6.1. この $A = (a_{ij})_{m \times n}$ を U の基底 $[\mathbf{u}]$ と V の基底 $[\mathbf{v}]$ に関する表現行列という。

注意 6.2. 表現行列は基底のとり方によって変わる。

例. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする。線形写像 T_A の、標準基底に関する表現行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である。 V の基底を $[2\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2]$ に変えると、

$$\begin{aligned} T_A(\mathbf{x}) &= \begin{pmatrix} 2x_1 + 4x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 + 2x_3)(2\mathbf{e}'_1) + x_2 \mathbf{e}'_2 \\ &= [2\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2] \begin{pmatrix} x_1 + 2x_3 \\ x_2 \end{pmatrix} = [2\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので、表現行列も $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に変わる。

例題 6.3. $U = \mathbb{R}[x]_2$, $V = \mathbb{R}[x]_1$ とする。 $T: U \rightarrow V$ を $T(p(x)) = p'(x) + p(0)x$ により定義すると、これは線形写像になる。 U の基底 $[x^2, x, 1]$ および V の基底 $[x, 1]$ に関する T の表現行列を求めよ。

(考え方) 表現行列は、 U の基底をうつしたものを、 V の基底に関して数ベクトル表示し、それらを並べたものである。よって、 U の基底の行き先を調べる。(解答略)

^{*12} 以下、スペースの都合で $[\mathbf{u}] = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$ や $[\mathbf{v}] = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$ という略記号を用いる。

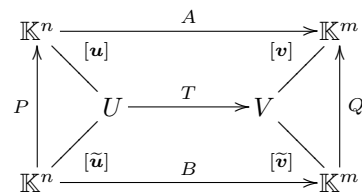
問題。線形写像 T の表現行列は基底を変えると違う行列になる。しかし元は同じ写像なので、何らかの関係があるはず。

6.2 表現行列間の関係

U の二つの基底 $[\mathbf{u}]$ と $[\tilde{\mathbf{u}}]$ には、正則行列 P を用いて $[\tilde{\mathbf{u}}] = [\mathbf{u}]P$ という関係^{*13}があった(定義 3.9)。これを用いる。まずは問題を定式化する。

	U	V	T の表現行列
基底 1	$[\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n]$	$[\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m]$	A
基底 2	$[\tilde{\mathbf{u}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{u}}_n]$	$[\tilde{\mathbf{v}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{v}}_m]$	B

このとき 2 つの $m \times n$ 行列 A, B の間の関係を調べる。



ここで、 P, Q は基底の変換行列 $[\tilde{\mathbf{u}}] = [\mathbf{u}]P$ および $[\tilde{\mathbf{v}}] = [\mathbf{v}]Q$ である。さて、 B は左下から右下に移す写像である。左下の元を \mathbf{y} で表すことにすれば $B\mathbf{y}$ にうつる。別の経路で左下から右下に行くことを考える。① まず左下からまず上に向かい ($\mathbf{y} \mapsto P\mathbf{y}$)、② 左上から右上に向かって ($P\mathbf{y} \mapsto AP\mathbf{y}$)、③ その後下に向かう ($AP\mathbf{y} \mapsto Q^{-1}AP\mathbf{y}$) と右下にたどり着く。この 2 つが一致するので、 $B = Q^{-1}AP$ でなければならない。

定理 6.4. T の二つの表現行列 A, B に対して

$$B = Q^{-1}AP$$

が成り立つ。ここで P, Q は基底の変換行列である。

例題 6.5. $U = \mathbb{R}^3$, $V = \mathbb{R}^2$ とし、 $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき、次の基底に関する T_A の表現行列 B を求めよ。

$$[\tilde{\mathbf{u}}_1, \tilde{\mathbf{u}}_2, \tilde{\mathbf{u}}_3] = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, [\tilde{\mathbf{v}}_1, \tilde{\mathbf{v}}_2] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(考え方) 例題 6.3 の方法でもできるが、ここでは定理 6.4 を用いる。これは標準基底に関する T_A の表現行列が A であると分かっており、またこの場合は基底の変換行列 P, Q の計算が容易であるからである。(解答略)

^{*13} これは $\mathbf{u} = [\mathbf{u}]\mathbf{x} = [\tilde{\mathbf{u}}]\mathbf{y}$ ならば、 $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ となることを意味する。

7 線形変換と行列の固有値

7.1 線形変換

定義 7.1. V をベクトル空間とする. $T: V \rightarrow V$: 線形, を特に線形変換という.

注意 7.2. 線形変換を考えると, 送り元と送り先はともに V であり, どちらも同じ基底になる. よって, 定理 6.4 において $Q = P$ となるので, $B = P^{-1}AP$ となる.

定義 7.3. 2 つの正方行列 A, B に対してある正則行列 P が存在して $B = P^{-1}AP$ となるとき, A と B は互いに共役であるという.

注意 7.4. 同じ線形変換に対する 2 つの行列は常に共役である. 逆に, 互いに共役な 2 つの行列は同じ線形変換から得られる.

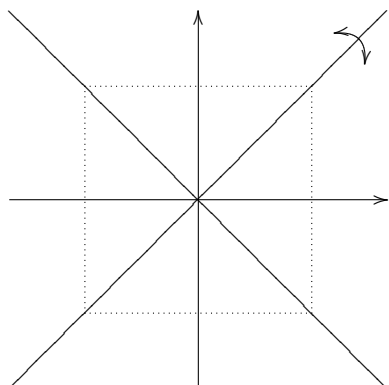
問題. 与えられた正方行列と共役な行列で, 最も簡単なものはどんな行列か.

→ この問題を考える際に, 固有値・固有ベクトルが重要な役割を果たす.

7.2 行列の固有値

定義 7.5. n 次正方行列 A に対して, $Ax = \lambda x$ を満たす数 λ とベクトル $x \neq 0$ が存在するとき, λ を A の固有値と呼び, x を (固有値 λ に対応する) 固有ベクトルという.

例 7.6. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とする. (i) $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ より, $\lambda = 1$ は A の固有値であり, 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (ii) $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ より, $\lambda = -1$ も A の固有値であり, 対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.



注意 7.7. (1) 固有値は複数存在する. (2) 固有ベクトルは, A の作用で向きは変わる (こともある) が, その方向

は変わらない.

固有値の求め方 $x \neq 0$ とする. 同値変形により $Ax = \lambda x \Leftrightarrow 0 = (\lambda x - Ax) \Leftrightarrow (\lambda E_n - A)x = 0$ であるが, もし $\lambda E_n - A$ が正則ならば $x = 0$ となるが, これは $x \neq 0$ と矛盾. したがって $\lambda E_n - A$ は正則ではありえない. これより

$$\lambda \text{ が } A \text{ の固有値} \Leftrightarrow \det(\lambda E_n - A) = 0.$$

定義 7.8. $g_A(t) := \det(tE_n - A)$ を A の固有多項式という.

定理 7.9. (1) λ が A の固有値 $\Leftrightarrow g_A(\lambda) = 0$, (2) λ に対応する固有ベクトルは, 連立一次方程式 $(\lambda E_n - A)x = 0$ の解である. ただし $x \neq 0$ である.

例題 7.10. $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを求めよ.

(考え方) ① $g_A(t) = 0$ を解き, その解 λ を求める. ② ①で求めた λ に対して $(\lambda E_2 - A)x = 0$ を解く. その解の中で非自明なものが λ の対する固有ベクトルになる. (解答略)

注意 7.11. (1) A の成分がすべて実数であっても, 固有値も実数になるとは限らない. ex. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ とすると $g_A(t) = t^2 + 1$ なので $\lambda = \pm i$. (2) 各固有値に対応する固有ベクトルは必ず存在する. (3) 1 つの固有値に対応する固有ベクトルは 1 本だけとは限らない ($g_A(t) = 0$ が重解を持つとき, 複数存在する).

8 線形変換の固有値と固有ベクトル

8.1 共役に関して

$B = P^{-1}AP$ とかけるとき, A と B は共役といった. B の固有多項式 $g_B(t)$ を計算してみよう. $E_n = P^{-1}P$ と書けることに注意すると $tE_n - B = P^{-1}(tE_n - A)P$ となるので, 行列式の積公式より $g_B(t) = g_A(t)$ となることがわかる. よって次の命題を得る.

命題 8.1. A と B が共役ならば $g_A(t) = g_B(t)$. 特に固有値はすべて一致する.

8.2 一般の線形変換において

定義 8.2. V を K 上のベクトルとし, T をその上の線形変換とすると, $T(v) = \lambda v$ を満たす λ を T の固有値, v を固有値 λ に対する固有ベクトルという. ただし $v \neq 0_V$ とする.

V の基底 $[v_1, \dots, v_n]$ を一つ決めると, T の表現行列 A が定まることを思い出そう.

定義 8.3. T の固有多項式 $g_T(t)$ を $g_T(t) := g_A(t) = \det(tE_n - A)$ により定義する.

注意 8.4. 命題 8.1 よりこの定義は基底のとり方に依らないことが分かる. この性質を well-defined という.

次の定理は明らかであろう.

定理 8.5. λ が T の固有値 $\Leftrightarrow g_T(\lambda) = 0$.

例題 8.6. 線形変換 $T: \mathbb{R}[x]_1 \rightarrow \mathbb{R}[x]_1$ を次で定義する.

$$T(p(x)) := p(2x + 1).$$

- (1) T の固有多項式 $g_T(t)$ を求めよ.
- (2) T の固有値 λ を求めよ.
- (3) T の各固有値 λ に対応する固有ベクトルを求めよ.

(考え方) ① まず, 表現行列 A が必要なので, 基底を一つ決める. ここでは標準基底 $[x, 1]$ を選ぶ. ② 表現行列 A に対して, いつもの方法で固有値と固有ベクトルを求める. ここで求めた固有値が T の固有値である. ③ しかし, ここで求めた固有ベクトルは \mathbb{R}^2 の元であり, $\mathbb{R}[x]_1$ の元ではないので, 求めた固有ベクトルを $\mathbb{R}[x]_1$ の元に変換する必要がある. ④ そのためには求めた固有ベクトル $(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix})$ とする) に最初に与えた基底 $[x, 1]$ をつければよい. つまり, $[x, 1](\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}) = ax + b$ が求める固有

ベクトルとなる. (解答略)

8.3 固有空間

定義 8.7. 線形変換 $T: V \rightarrow V$ の固有値 λ に対して

$$W(\lambda; T) := \{v \in V; T(v) = \lambda \cdot v\}$$

は V の部分空間となる. これを固有値 λ に対する T の固有空間という.

例えば例題 8.6 の T では

$$\begin{aligned} W(1; T) &= \{a \cdot 1; a \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(1) \\ W(2; T) &= \{b(x+1); b \in \mathbb{R}\} = \text{Span}(x+1) \end{aligned}$$

となる. このどちらも多項式空間の部分空間であることに注意.

注意 8.8. この例ではどちらも $\dim W(\lambda; T) = 1$ であるが, 一般には $\dim W(\lambda; T) \geq 1$ である.

注意 8.9. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する固有空間を考える. 例 7.6 を参照のこと. A は直線 $y = x$ に関する折り返しを与える. 固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ であったので, 固有空間は $W(1; A) = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ (直線 $y = x$) および $W(-1; A) = \text{Span}(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix})$ (直線 $y = -x$) である. これらはどちらも A の作用で (集合として) 変わらない. つまり, 固有空間とは A の作用で不変な部分空間であり, 固有ベクトルとはその基底なのである.

8.4 Cayley-Hamilton の定理

定理 8.10. $g_A(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$ とすれば,

$$g_A(A) := a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0 E_n = O.$$

例えば $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $g_A(t) = t^2 - (a+d)t + (ad-bc)$ なので, $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)E_2 = O$ が成り立つ.

(証明略)

9 行列の対角化

目標は正方行列 A に対してその共役 $B = P^{-1}AP$ をなるべく簡単にする (= 対角化) こと。

定義 9.1. 正方行列 A が対角化可能とは、正則行列 P を上手く選んだときに $P^{-1}AP$ を対角行列にできること。特にすべての成分が実数であるときには、 A は \mathbb{R} 上で対角化可能という。

注意 9.2. 例えば $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ などがあるように、常に対角化できるとは限らない。

9.1 固有空間の性質

補題 9.3. V を \mathbb{K} 上のベクトル空間とし、 V 上の線形変換 T の固有値 λ, μ をとる。 $\lambda \neq \mu$ ならば $W(\lambda; T) \cap W(\mu; T) = \{0_V\}$ 。

補題 9.4. V の部分空間 W_1, W_2 が $W_1 \cap W_2 = \{0_V\}$ を満たすとする。 $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ に対して $w_1 + w_2 = 0_V$ ならば、 $w_1 = w_2 = 0_V$ 。

命題 9.5. V 上の線形変換 T の互いに異なる固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ に対して、

$$\sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; T) \leq \dim V.$$

9.2 行列の対角化

定理 9.6. A を n 次正方行列とし、 $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ を A の互いに異なる 実 固有値とする。

$$A \text{ が } \mathbb{R} \text{ 上で対角化可能} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; A) = n.$$

定義 9.7. 固有多項式を $g_A(t) = (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_r)^{m_r}$ と因数分解したとき、 m_i を固有値 λ_i の重複度という。

定理 9.8. $\dim W(\lambda_i; A) \leq m_i \Rightarrow A$ は対角化できない。

例題 9.9. 次の行列は対角化可能か。可能ならば対角化せよ。

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(考え方) 対角化に必要なのは固有値と固有ベクトルである。求める対角行列は固有値を並べたものであり、求め

る正則行列 P は固有ベクトルを並べたものである。対角化できるかどうかは定理 9.8 を使う。

(略解) (1) 固有値を計算すると $\lambda = -1$ (重複度 2), 2. 固有ベクトルを計算する^{*14}と、 $\lambda = -1$ の固有ベクトルが $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ しかないのである。 $\lambda = -1$ の重複度は 2 なので、 A は対角化できない。

(2) 固有値を計算すると $\lambda = 2$ (重複度 2), 3. $\lambda = 2$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で、 $\lambda = 3$ の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。よって $\dim W(2; B) + \dim W(3; B) = 3$ なので、 B は対角化可能である。そこで

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

とおき、 $P = (p_1, p_2, p_3)$ とおくと

$$BP = (2p_1, 2p_2, 3p_3) = P \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

であるので、 $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

注意 9.10. この P, D は一意に決まるわけではない。たとえば $\tilde{P} = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば $\tilde{P}^{-1}B\tilde{P} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ となる。

^{*14} 重複度が大きいものから計算する。

10 内積空間

共役 $B = P^{-1}AP$ において, 正則行列 P は「基底の変換」あるいは「座標の変換」を表していた. ここからはよい変換とはどういうものなのかということについて考える. そのために内積とノルムというものを導入する.

10.1 内積

定義 10.1. \mathbb{K} 上のエクトル空間の内積 $\langle u|v \rangle \in \mathbb{K}$ とは, 次の 4 条件を満たすもの.

- (1) $\langle u + u'|v \rangle = \langle u|v \rangle + \langle u'|v \rangle$
- (2) $\langle \lambda \cdot u|v \rangle = \lambda \langle u|v \rangle$
- (3) $\langle u|v \rangle = \overline{\langle v|u \rangle}$ (複素共役)
- (4) $u \neq 0_V$ ならば $\langle u|u \rangle > 0$.

例. (i) $V = \mathbb{R}^n$ の標準内積は

$$\langle x|y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n = {}^t x y.$$

(ii) $V = \mathbb{C}^n$ の標準内積は

$$\langle z|w \rangle = z_1 \overline{w_1} + \cdots + z_n \overline{w_n} = {}^t z \overline{w}.$$

注意 10.2. (1) $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ のとき, $\langle u|\lambda \cdot v \rangle = \overline{\lambda} \langle u|v \rangle$ となることに注意. (2) 内積を持つベクトル空間を内積空間, もしくは計量ベクトル空間という. (3) 条件 (2) より $\langle u|0_V \rangle = \langle 0_V|u \rangle = 0$ となる.

例題 10.3. $V = \mathbb{R}[x]_n$ とする. $p, q \in V$ に対して

$$\langle p|q \rangle := \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$$

とすれば, これは V の内積になることを示せ.

(考え方) 内積の条件 (1) ~ (4) を確認すればよい. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ なので, 条件 (3) は単に $\langle p|q \rangle = \langle q|p \rangle$ になる. (証明略)

10.2 ノルム

定義 10.4. 内積空間 V において, $u \in V$ のノルムを

$$\|u\| := \sqrt{\langle u|u \rangle}$$

により定義する.

\mathbb{R}^2 の標準内積では, $\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ となる. つまり, ノルムは「長さ」の概念を一般化したものである.

命題 10.5. 内積とノルムは次を満たす.

- (1) $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$,
- (2) $|\langle u|v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$,
- (3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$

(略証) (1) は定義より明らか. (2) $t \in \mathbb{R}$ に対して, 内積の条件をすべて用いれば,

$$\|tu + v\|^2 = \|u\|^2 t^2 + 2\langle u|v \rangle t + \|v\|^2 \geq 0$$

を得る. これは t に関する 2 次関数で, これが常に 0 以上であるので $(2\langle u|v \rangle)^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$ となるので, (2) が示された. (3) は (右辺)² - (左辺)² を考え, (2) を適用すればすぐわかる.

(コメント) (2) の不等式を Schwartz の不等式, (3) の不等式を三角不等式という. いずれの場合も等号成立は u と v が線形従属のときである.

注意 10.6. $V = \mathbb{R}^2$ とする. 命題 10.5 の (2) の証明において $t = -1$ とすると

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u|v \rangle$$

を得る. 一方で余弦定理を思い出せば

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cos \theta$$

が成り立つことも分かる. ここで θ は二つのベクトル u と v のなす角である. これより $\cos \theta = \frac{\langle u|v \rangle}{\|u\| \cdot \|v\|}$ となり, 特に

$$\langle u|v \rangle = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

となることがわかる. つまり,

ノルムは「長さ」, 内積は「長さ」と「角度」

の情報を持っていることが分かる.

定義 10.7. $u, v \in V$ が $\langle u|v \rangle = 0$ を満たすとき, u と v は直交するといい, $u \perp v$ と表す.

命題 10.8. u_1, \dots, u_r を互いに直交するベクトルとし, さらに $u_j \neq 0_V$ であるとする. このとき, u_1, \dots, u_r は線形独立となる.

(証明略)

例題 10.9. $V = \mathbb{R}[x]_1$ とする. $p(x) = x + 1$ と直交する多項式 $f(x)$ で, 零多項式でないものを一つ求めよ.

(考え方) $f(x) = ax + b$ とおき, $\langle f|p \rangle = 0$ となるように a, b の値を決める. その決め方に自由度があるので, 適当に定める. (解答略)

11 正規直交基底

11.1 良い基底について

定義 11.1. u_1, \dots, u_r ($u_j \neq 0_V$) が (i) $\langle u_i | u_j \rangle = 0$ を満たすとき直交系, (ii) 直交系かつ $\|u_j\| = 1$ のとき正規直交系, (iii) 正規直交系かつ V の基底のとき正規直交系, という.

例. $V = \mathbb{R}^2$ のとき, $u_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ は正規直交基底である.

命題 11.2. u_1, \dots, u_n を正規直交基底とし $x = x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$, $y = y_1 u_1 + \dots + y_n u_n$ とおく. このとき

$$\langle x | y \rangle = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

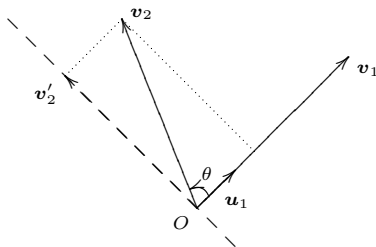
注意 11.3. 任意の (有限次元) ベクトル空間は正規直交基底を持つ. そのことを次の節で示す.

11.2 Gram-Schmidt の直交化法

定理 11.4. V の基底 $[v_1, \dots, v_n]$ からスタートして, V の正規直交基底 $[u_1, \dots, u_n]$ を構成できる. ここで構成された正規直交基底は次を満たす.

$$\begin{aligned} \text{Span}(v_1) &= \text{Span}(u_1) \\ \text{Span}(v_1, v_2) &= \text{Span}(u_1, u_2) \\ &\vdots \\ \text{Span}(v_1, \dots, v_n) &= \text{Span}(u_1, \dots, u_n) \end{aligned}$$

(略証) $n = 3$ として証明する. まず $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ である. 次に u_2 を, v_1 と v_2 から構成する. $v_2 = (v_2 \text{ の } u_1 \text{ 方向成分}) + (v_2 \text{ の } u_1^\perp \text{ 方向成分})$ と分解する. ここで u_1^\perp は u_1 と直交する方向を表している.



さて, v_2 の u_1 方向成分は, 方向が u_1 であって, その大きさが $\|v_2\| \cos \theta = \langle v_2 | u_1 \rangle$ であるベクトルになる. ここで θ は v_2 と u_1 のなす角度である. よって $v'_2 := v_2 - \langle v_2 | u_1 \rangle u_1$ とおき, $u_2 := \frac{1}{\|v'_2\|} v'_2$ とすればよい. 最後に u_3 を構成する. 先程と同様に考

えれば, $v'_3 := v_3 - \langle v_3 | u_1 \rangle u_1 - \langle v_3 | u_2 \rangle u_2$ とおき $u_3 = \frac{1}{\|v'_3\|} v'_3$ とすればよいことがわかる. すると, u_1, u_2, u_3 が求めていた正規直交基底になる. \square

(コメント) 一般の場合も全く同様にして任意の基底 $[v_1, \dots, v_n]$ から正規直交基底 $[u_1, \dots, u_n]$ を構成できる. その構成は, 帰納的に, $u_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1$ および $k = 2, \dots, n$ に対して

$$v'_k := v_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k | u_i \rangle u_i$$

として $u_k = \frac{1}{\|v'_k\|} v'_k$ とすればよい.

例題 11.5. 次の \mathbb{R}^3 の基底を正規直交化せよ.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(考え方) Gram-Schmidt の直交化法を適用すればよい. 解答は略.

11.3 良い変換について

定義 11.6. (1) 実数成分の行列 P が直交行列 $\Leftrightarrow {}^t P P = E_n$ (2) 複素数成分の行列 U がユニタリ行列 $\Leftrightarrow {}^t U \bar{U} = E_n$.

注意 11.7. $x \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|Px\|^2 = {}^t x {}^t P P x = {}^t x x = \|x\|^2$$

である. つまり, 直交行列は長さを変えない変換である. ユニタリ行列も同様である.

注意 11.8. ${}^t P P = E_n$ より $1 = \det({}^t P P) = (\det P)^2$ であるので, $\det P = \pm 1$ ($\neq 0$) である. これより特に P は正則行列であって, $P^{-1} = {}^t P$ となる.

12 対称行列

この節では、基本的には \mathbb{R}^n について扱うが、後半に複素空間 \mathbb{C}^n も現れる。

12.1 直交行列の性質

定理 12.1. \mathbb{R}^n のベクトル p_1, \dots, p_n に対し次は同値。

- (i) p_1, \dots, p_n は正規直交基底。
- (ii) $P = (p_1, \dots, p_n)$ は直交行列。

(証明略)

12.2 行列の三角化

共役 $B = P^{-1}AP$ は「座標変換」を表していた。一方で直交行列は長さを変えないという良い性質を持つ変換である。そこで、直交行列による共役でどのくらい簡単にできるか、という問題について考える。

定理 12.2. A を n 次の実正方行列とする。 A の固有値が全て実数ならば、 A は固有値を対角成分に持つ実の(上)三角行列と直交行列により共役。つまり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

と書ける。ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値であり、 P は適切な直交行列である。

(証明について) 証明は帰納法を用いる。講義内では説明しないので、気になる方は教科書を参考のこと。

注意 12.3. この定理より線形変換の固有値が全て実数ならば、正規直交基底という良い基底に関する表現行列として、三角行列という扱いやすい行列にできることがわかる。

► 直交行列により「対角行列」と共役になる行列について考える。

$$\begin{array}{c} \text{対角行列} \\ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \end{array} \subset \begin{array}{c} \text{三角行列} \\ \begin{pmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \end{array}$$

さて、 D を対角行列、 P を直交行列として、 $A = PDP^{-1}$ とする。 $P^{-1} = {}^tP$ より、 $A = PDP^tP$ である。ここで、

$${}^tA = {}^t(PD^tP) = PD^tP = A.$$

つまり、 ${}^tA = A$ なので、 A は対称行列である。

実はその逆も成り立つ。

定理 12.4. 任意の対称行列は直交行列により対角化可能。

(証明は後述の注意 12.8 で行う)

12.3 対称行列の性質

対称行列は量子力学や統計力学など、様々な分野で現れる重要な行列である。

命題 12.5. (1) \mathbb{R}^n の標準内積に関して $(Ax|y) = (x|{}^tAy)$ 、(2) \mathbb{C}^n の標準エルミート内積に関して $\langle Ax|y \rangle = \langle x|{}^tAy \rangle$ 。

注意 12.6. A が対称行列ならば $(Ax|y) = (x|Ay)$ 。

定理 12.7. 実対称行列の固有値はすべて実数である。

(コメント) 「実数になること」を示すためには複素数の範囲で考える必要がある。証明は略。

注意 12.8. 定理 12.7 より、実対称行列 A の固有値はすべて実数である。よって定理 12.2 を適用でき、それによって適切な三角行列 T を用いて $A = PTP^{-1}$ と表すことができる。ここで ${}^tA = A$ より ${}^tT = T$ となり、 T が対角行列でなければならないことがわかる。したがって、任意の対称行列は直交行列により対角化可能であることがわかる。

定義 12.9. 実対称行列 A の固有値がすべて正であるとき、 A は正定値であるという。

命題 12.10. 実対称行列 A について、次は同値。

- (1) A は正定値。
- (2) A の固有値はすべて実数。
- (3) 任意の $x \in \mathbb{R}^n$ ($x \neq 0$) に対して $(Ax|x) > 0$ 。
- (4) A の「主小行列式」の値がすべて正である。

ここで (4) の条件は、例えば $n = 3$ の場合における $A = \begin{pmatrix} a & x & y \\ x & b & z \\ y & z & c \end{pmatrix}$ に対しては、次のようになる:

$$a > 0, \quad ab - x^2 > 0, \quad \det A > 0.$$

13 対称行列の対角化

前は「対称行列は直交行列によって直交化できる」ことを学んだ。最終回である今回は、どうやって直交行列で対角化するのか、ということについて学ぶ。

復習 行列 A を対角化するには、

- ① 固有多項式を計算し、固有値を求める。
- ② 各固有値に対応する固有ベクトルを求める。
- ③ 固有値を対角成分に並べた行列を D 、固有ベクトルを並べた行列を P とすれば、 $P^{-1}AP = D$ と対角化できる。

A が対称行列のときに P を直交行列にしたい。さて直交行列は正規直交基底と対応していて、正規直交基底は Gram-Schmidt の直交化法で構成できることより、Gram-Schmidt の直交化法を使えば良さそうである。しかし、この方法は一般には各構成ベクトルの方向を変えるため、固有ベクトルからなる基底に対して Gram-Schmidt の直交化法を施して得られる新しい基底を構成するベクトルが、固有ベクトルであるかどうかは自明ではない。そこで次の命題が必要になる。

命題 13.1. A を対称行列とし、 λ, μ を A の相異なる固有値とする。このとき、 λ に対する固有ベクトル x と μ に対する固有ベクトル y に対して、 $\langle x | y \rangle = 0$ 。

注意 13.2. 一般の行列では成立しない。

この命題より、対称行列 A の固有ベクトルからなる基底 $[p_1, \dots, p_n]$ に Gram-Schmidt の直交化法を施して得られる正規直交基底 $[q_1, \dots, q_n]$ において、各 q_i は A の固有ベクトルになっていることがわかる。

まとめ 対称行列の直交行列による対角化の方法。

- ① 固有多項式を計算し、固有値を求める。
- ② 各固有値に対応する固有ベクトルを求める。
- ③ ②で求めた固有ベクトルの組に対して Gram-Schmidt の直交化法を適用して正規直交基底 (=直交行列) を作る。
- ④ 固有値を対角成分に並べた行列を D 、③で作った行列を P とすれば、 $P^{-1}AP = D$ と直交行列により対角化できる。

例題 13.3. 次の実対称行列 A を直交行列により対角化せよ。

(考え方) 上記の対称行列の直交行列に依る対角化の方

法に従って対角化する。

(略解) ① 固有値を求める。固有多項式を計算すれば $g_A(t) = (t-2)^2(t+4)$ となるので、固有値は $\lambda = 2$ (重複度 2)、 -4 である。

② 固有ベクトルを求める。簡単な計算より、固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 2 本である。また固有値 $\lambda = -4$ に対応する固有ベクトルは $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ の 1 本である。

③ v_1, v_2, v_3 に Gram-Schmidt の直交化法を適用する。そうして得られるベクトルを u_1, u_2, u_3 とすると、

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となる。

④ 最後に対角化する。

$$P = (u_1, u_2, u_3) = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{30} & -2/\sqrt{6} \\ 0 & 1/\sqrt{30} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

とおけば、 P は直交行列であり、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

となる。

注意 13.4. 求めた P が直交行列であることを確かめるには ${}^tPP = E_n$ を確認する。また $P^{-1}AP = (\text{対角})$ を確認するときは、 $P^{-1} = {}^tP$ を利用する。