

線形代数学・同演習 B

演習問題 1

1. (1) $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (2) 解なし

(解説) (1) 係数行列を簡約化すれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. (2) 簡約化すれば $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -9 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. (1) -1 (2) -12 (3) 223

3. (1) $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$)

(2) $ax^2 + bx - a - b$ ($a, b \in \mathbb{R}$)

(3) $x^3/3 + x^2/2 + c$ ($c \in \mathbb{R}$)

(4) $ax^2 + bx + c$ ($a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$)

4. (1) \times (2) \bigcirc

(解説) 考えている集合に属する要素に対して, その和やスカラー倍を考えたときに, 元の集合に留まっているかどうかを調べる. (1) $x, y \in W_1$ とすれば, $A(x+y) = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$ なので $x+y \notin W_1$. よって部分空間でない. ($A0 = 0 \neq \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$) なので部分空間でない, でも可). (2) $x, y \in W_2$ とすれば, $A(x+y) = 0$ なので $x+y \in W_2$. スカラー倍も同様. よって部分空間.

5.[†] (1) \times (2) \bigcirc (3) \bigcirc (4) \times

(解説) 考えている集合に属する要素に対して, その和やスカラー倍を考えたときに, 元の集合に留まっているかどうかを調べる. (1) x^2 と $-x^2$ はどちらも 2 次多項式であるが, その和は 0 であり, これは 2 次の多項式ではない. よって部分空間でない. (2) $(x-1)$ で割り切れるような 3 次多項式は, 適当な 2 次以下の多項式 $p(x)$ を用いて $(x-1)p(x)$ と書ける. 例えば和を考えると, $(x-1)p_1(x) + (x-1)p_2(x) = (x-1)(p_1(x) + p_2(x))$ となるので和をとっても元の集合に留まっている. スカラー倍も同様. よって部分空間. (3) 定数項が 0 である多項式は $ax^3 + bx^2 + cx$ ($a, b, c \in \mathbb{R}$) という形をしている. このような多項式の和・スカラー倍をとっても定数項は 0 のままであるので, 部分空間になる. (4) 各係数の和が 1 であるような多項式同士を足せば, 各係数の和は 2 になるので, 和を取ったら元の集合からはみ出してしまう. よって部分空間でない.

6.[†] (1) \bigcirc (2) \bigcirc (3) \times

(解説) 命題 1.9 の三条件を確認すれば良い. (1) $\lambda, \mu \in \mathbb{K}, u, v \in W_1 \cap W_2$ とする. このとき $u, v \in W_1$ かつ $u, v \in W_2$ である. $i = 1, 2$ に対して W_i は V の部分

空間なので, $\mathbf{0} \in W_i$ かつ $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in W_i$ である. したがって, $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$ かつ $\lambda \mathbf{u} + \mu \mathbf{v} \in W_1 \cap W_2$ なのでこれは部分空間. (2) (1) と同様に $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} \in W_1 + W_2$ である. また, $\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in W_1 + W_2$ ($\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in W_i$) とすれば,

$$\lambda(\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + \mu(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = (\lambda \mathbf{u}_1 + \mu \mathbf{v}_1) + (\lambda \mathbf{u}_2 + \mu \mathbf{v}_2)$$

であり, W_1, W_2 は部分空間なので, $W_1 + W_2$ も部分空間となる. (3) 例えば, $V = \mathbb{R}^2$ とし, $W_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R} \right\}$, $W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}; y \in \mathbb{R} \right\}$ とすれば明らかに W_1, W_2 は部分空間であり, $W_1 \cup W_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; x = 0 \text{ 又は } y = 0 \right\}$ となる. しかしながら, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$ であるが, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$ である.

7.[†] 部分空間になるのは (1),(2) で, ならないのは (3),(4) である. 考え方は他の問題と同じなので解説は省略.

線形代数学・同演習 B

演習問題 2

1.[†] (1) ○ (2) × (3) × (4) ○

(考え方) 条件 $u, v \in W$ ならば $\lambda u + \mu v \in W$ をみたすかどうかを調べる. このよう
な形で定義される集合は, この講義に限らずによく現れてくるものなので, 扱い方に慣
れておくこと. (2) $(x, x^2), (y, y^2) \in W_2$ をとる. $(x, x^2) + (y, y^2) = (x + y, x^2 + y^2)$
であるが, たとえば $x = y = 1$ とすれば $x^2 + y^2 \neq (x + y)^2$ なので, W_2 は和で閉じ
ていない. (3) ある x について $f(x) > 0$ となる $f \in W_3$ をとる. このとき, 負の数 λ
に対して関数 λf は $(\lambda f)(x) < 0$ $\lambda f \notin W_3$ となる. すなわち, W_3 はスカラー倍に関
して閉じていない. (4) $f, g \in W_4$ をとると, $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$
をみたす. このとき関数 $\lambda f + \mu g$ について考える. 三角不等式より,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x) + \mu g(x)| dx \leq |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx + |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$$

であるので, $\lambda f + \mu g \in W_4$. 零元 (零関数) がこの空間に入っていることは明らか.

2. (1) 線形独立 (2) 線形独立でない

3.[†] (1) 線形独立 (2) 線形独立でない

(考え方) 問題 2,3 はいずれも, 与えられたベクトルの組を並べた行列を簡約化して,
その階数を調べる. 行列式を計算しても線形独立性は判定できるが, 後々への応用を
考えると簡約化の方がよい.

4.[†] (1) 線形独立 (2) 線形独立でない (3) 線形独立 (4) 線形独立でない

(考え方) 多項式の場合は, 係数を並べたベクトルに対して問題 2,3 と同様に考える.

5. (1) 線形独立 (2) 線形独立でない

(考え方) 例題 2.8 と同様にすればよい.

6. (1) $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$ より. (2) $x^3 = (x + 1)^3 - 3(x + 1)^2 + 3(x + 1) - 1$.

(考え方) (1) は問題 4 と同様. (2) は $x^3 = a(x + 1)^3 + b(x + 1)^2 + c(x + 1) + d$ とお
き, 右辺を展開した後に係数比較をする.

7.[†] (1) 正しい. 問題 3 と同様にできる. (2) 誤り. n が偶数のときは線形従属になる.

(考え方) 例題 2.8 と同様. (2) については, $n = 3, 4$ として具体的なものに対して計
算してみるとよい.

線形代数学・同演習 B

演習問題 3

1. (1) 基底をなす (2) 基底にならない

(考え方) 与えられたベクトルを並べた行列が正則かどうか調べる．正則ならば基底をなし，そうでないならば基底になれない．

2. (1) 略．(2) $\dim V = 3$ (自由に動けるパラメータは 3 つなので)．自然な基底は $x, y, 1$ ．(3) $f_1(x, y) = -x - y + 1$, $f_2(x, y) = x$, $f_3(x, y) = y$ とすればよい．

- 3.[†] (1) 基底になる．(2) 基底にならない．

(考え方) 係数を並べた行列が正則かどうかで判断できる．

- 4.[†] (1) $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ は n 次正方行列のなすベクトル空間の部分集合であるため， $O \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ (O は零行列) および $X, Y \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ のとき $\lambda X + \mu Y \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ となることを確認する．(2) $\dim \text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ ．(3) E_{ii} ($i = 1, \dots, n$) および $E_{ij} + E_{ji}$ ($1 \leq i < j \leq n$)

- 5.[†] (1) $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} a \\ b-a \\ c-b \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 3a-2b-c \\ -2a+2b+c \\ -a+b+c \end{pmatrix}$

(考え方) (3) を例に説明する． $[q_1(x), q_2(x), q_3(x)] = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ なので

$$[x^2, x, 1] = [q_1(x), q_2(x), q_3(x)] \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = [q_1(x), q_2(x), q_3(x)] \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

よって， $ax^2 + bx + c = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = [q_1(x), q_2(x), q_3(x)] \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ．

- 6.* (1) ベクトル空間になるための条件 (教科書 p.63 の脚注) は，考えている空間が複素数なので当然全て成り立つ．ただし，(4)-(6) の a, b は実数だけを考慮していることに注意．任意の複素数は $x + yi$ (i は虚数単位) と書けるので $\dim \mathbb{C} = 2$ ．

(2) \mathbb{R} が \mathbb{Q} 上のベクトル空間になることも (1) と同様である．その次元が無限次元になることは，背理法によって示せる．仮に有限次元になると仮定すると，ある自然数 n に対して $\pi^n, \dots, \pi, 1$ が線形従属になってしまうが，それは適当な有理数係数 a_0, \dots, a_n により $a_n \pi^n + \dots + a_1 \pi + a_0 = 0$ となることを意味する．これは $x = \pi$ が多項式 $p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ の零点になることを表しているが，この結果は π の超越性に反する．よって， \mathbb{R} は “ \mathbb{Q} 上の” ベクトル空間としては無限次元でなければならない．

線形代数学・同演習 B

演習問題 4

1. (1) 次元は 3, 基底は例えば a_1, a_2, a_4 . (2) 次元は 2, 基底は例えば b_1, b_2 .
(考え方) 与えられたベクトルを並べて作った行列を簡約化し, その主成分の数が次元と一致し, 主成分がある列に対応するベクトルを選べばそれが基底になる.
- 2.[†] (1) 次元は 2, 基底は例えば $f_1(x)$ と $f_2(x)$ (2) 次元は 3, 基底は例えば $g_1(x), g_2(x)$ と $g_4(x)$ (3) 次元は 4, 基底は例えば $H_0(x), \dots, H_3(x)$ ^{*1}.
(考え方) 多項式の標準基底 $[x^3, x^2, x, 1]$ に関してベクトル表示をして, そのベクトルの組に対して問題 1 と同様の計算を行う. 基底も主成分に対応する列を持てればよいが, 考えている空間が多項式の空間なので, 基底も多項式に戻すことを忘れずに.
- 3.[†] (1) 次元は 1, 基底は例えば $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (2) 次元は 2, 基底は例えば $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
(考え方) 解空間は, 与えられた行列を係数行列に持つ連立方程式を解き, その解のパラメータの数が次元, 解を表すベクトルが基底. 像空間は問題 1 と同様.
4. (1) $\begin{pmatrix} 56 & -17 \\ -23 & 7 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 13 & -4 & 16 \\ 6 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; (考え方) 行列として $([u])^{-1}([\tilde{u}])$ を計算すればよい.
5. U の二つの基底をそれぞれ $[u_1, \dots, u_n]$ と $[\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n]$ とし, 基底の変換行列を $P = (p_1, \dots, p_n)$ とおく. このとき $[\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n] = [u_1, \dots, u_n]P$ である. さて, p_1, \dots, p_n の線形独立性を調べるので, $a_1 p_1 + \dots + a_n p_n = 0$ とおく. このとき,
- $$0 = [u] \sum_{i=1}^n a_i p_i = [u_1, \dots, u_n] P \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n] \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \tilde{u}_1 + \dots + a_n \tilde{u}_n.$$
- ここで $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$ は線形独立なので, $a_1 = \dots = a_n = 0$ でなければならない. よって, p_1, \dots, p_n は線形独立となる.
- 6.[†] (1) $m = \dim W$ とおき, v_1, \dots, v_m をその基底とする. すると, これらは V においても線形独立である. $\dim V$ は V から取り出せる線形独立なベクトルの最大個数だったので, $\dim V \geq m = \dim W$ となる. (2) \Leftarrow は明らかなので, \Rightarrow を示す. まず明らかに $W \subset V$ である. (1) と同様に v_1, \dots, v_m を W の基底とする. $\dim V = m$ であるので, V の元は m 個の線形独立なベクトルの線形結合で表すことができるが, そのベクトルとして v_1, \dots, v_m を選べば, V の任意の元は W の元 v_1, \dots, v_m の線形結合で書けることになる. つまり $V \subset W$ となるので, $W = V$ である.

10 月 31 日分 (凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

^{*1} 問題 6 より $\mathbb{R}[x]_3$ と一致するので, 今の場合は $x^3, x^2, x, 1$ でもよい.

線形代数学・同演習 B

演習問題 5

- 1.[†] (1) 各 j に対して, $v_j \in \text{Im } T$ であるので, その定義より U のある要素 u_{r+j} で $T(u_{r+j}) = v_j$ となるものが存在する. ここで, v_1, \dots, v_s は基底であるので, どれも 0_V にはならない. つまり, $T(u_{r+j}) \neq 0_V$ であるので, $u_{r+j} \notin \text{Ker } T$ である. (2) u を U の任意の要素とする. まず, $T(u)$ を考えると, これは $\text{Im } T$ に属しているので, v_1, \dots, v_s の線形結合で表すことができる. つまり $u = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$ と表すことができる. さて, ここで $\tilde{u} := u - b_1 u_{r+1} - \dots - b_s u_{r+s}$ という U の要素を考える. これを T でうつすと,

$$T(\tilde{u}) = T(u) - (b_1 T(u_{r+1}) + \dots + b_s T(u_{r+s})) = 0_V$$

であるので, $\tilde{u} \in \text{Ker } T$ となる. つまり, $\tilde{u} = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$ と書くことができる. 以上より,

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$$

となるので, U の任意の要素はこれらの線形結合で書ける. (3) $u' = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + b_1 u_{r+1} + \dots + b_s u_{r+s}$ とし, 方程式 $u' = 0_U$ を考える. u_1, \dots, u_r は $\text{Ker } T$ の基底であること, および線形写像は零元を零元にうつすことより,

$$0_V = T(u') = b_1 T(u_{r+1}) + \dots + b_s T(u_{r+s}) = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$$

であるが, v_1, \dots, v_s は $\text{Im } T$ の基底なので, これを満たす (b_1, \dots, b_s) は $(0, \dots, 0)$ しかありえない. よって $u' = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$ であり特に $u' \in \text{Ker } T$ であるが, 今度は u_1, \dots, u_r が $\text{Ker } T$ の基底であるため, $a_1 = \dots = a_r = 0$ を得る. よって, u_1, \dots, u_{r+s} は線形独立となる.

- 2.[†] いずれの場合も $T(0_U) = 0_V$ より, 零元を持つことが分かる. また, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ としておく. (1) $v_1, v_2 \in \text{Im } T$ とする. このとき, U のある要素 u_1, u_2 を用いて $v_1 = T(u_1)$, $v_2 = T(u_2)$ とかけるが, $T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda v_1 + \mu v_2$ であるので, $\lambda v_1 + \mu v_2 \in \text{Im } T$ となる. よって部分空間となる. (2) $u, u' \in \text{Ker } T$ とすると, $T(\lambda u + \mu u') = \lambda T(u) + \mu T(u') = 0_V$ であるので, $\lambda u + \mu u' \in \text{Ker } T$, つまり部分空間となる.

3. 与えられた行列を簡約化すればよい. それぞれを簡約化したもの, T_A の退化次元と $\text{Ker}(T_A)$ の基底および T_A の階数と $\text{Im}(T_A)$ の基底は下記の表のようになる.

11月7日分 (凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

		(a)		(b)
(1)	1	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
(2)	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
(3)	2	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. (1) \times (2) \circ (3) \circ (4) \circ

(考え方) 任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して $T_k(x+y)$ と $T_k(x) + T_k(y)$ を考え, この 2 つが一致するかどうかを確認する. 同様のことを $T_k(\lambda x)$ と $\lambda T_k(x)$ についても確認する.

5. (1) $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$ (p, q は多項式) において, $T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$ を満たすことを確認すればよい. (2) 退化次元は 1, 階数は 3 (3) $x^2, x, 1$ (または $-3, -2x + 3, -x^2 + 6x - 3$ でもよい)

(考え方) (1) は全問と同様. (2), (3) は基底を一つ決め, その基底に関する数ベクトル表示に対して問題 3 と同様に考える.

6[†] (i) 和に関しては問題は生じていない. 実際, $X, Y \in M(2, \mathbb{C})$ とすれば, 複素共役および転置の性質より

$$\sigma(X+Y) = {}^t\overline{(X+Y)} = {}^t(\overline{X} + \overline{Y}) = {}^t\overline{X} + {}^t\overline{Y} = \sigma(X) + \sigma(Y).$$

一方, 複素数 λ に対して, スカラー倍を考えると

$$\sigma(\lambda X) = {}^t\overline{(\lambda X)} = {}^t(\overline{\lambda} \overline{X}) = \overline{\lambda} {}^t\overline{X} = \overline{\lambda} \sigma(X).$$

よって $\lambda \in \mathbb{R}$ ならば $\sigma(\lambda X) = \lambda \sigma(X)$ を満たすので \mathbb{R} 上線形になるが, 複素数のときは $\sigma(\lambda X) \neq \lambda \sigma(X)$ であるので \mathbb{C} 上では線形にならない.

(ii) $X, Y \in W$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ のとき $\lambda X + \mu Y \in W$ を示せばよい (零行列を含むことは明らか). (i) で計算したように $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ より

$$\sigma(\lambda X + \mu Y) = \sigma(\lambda X) + \sigma(\mu Y) = \lambda \sigma(X) + \mu \sigma(Y) = \lambda X + \mu Y$$

となるので, $\lambda X + \mu Y \in W$ である.

(iii) $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W$ とする. $x, y, z, w \in \mathbb{C}$ である. $\sigma(X) = {}^t\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{z} \\ \overline{y} & \overline{w} \end{pmatrix}$ なので, $\sigma(X) = X$ とすれば

$$x = \overline{x}, \quad y = \overline{z}, \quad z = \overline{y}, \quad w = \overline{w}$$

を満たさなければならない．よって $x, w \in \mathbb{R}$ および $z = \bar{y}$ なので， $y = a + bi$ とすれば $X \in W$ は

$$X = \begin{pmatrix} x & a + b \\ a - bi & w \end{pmatrix} \quad (a, b, x, w \in \mathbb{R})$$

とかける．よって次元 (=パラメータの数) は 4 で，基底として

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

がとれる．

線形代数学・同演習 B

演習問題 6

$$1. (1) \begin{pmatrix} -1 & -10 & -10 \\ -4 & -23 & -25 \end{pmatrix} (2) \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \\ 23 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

(考え方) 与えられた \mathbb{R}^3 の基底をなすベクトルを並べた行列を P , \mathbb{R}^2 の基底をなすベクトルを並べた行列を Q とすれば, 求める表現行列は, 講義中の定理により $Q^{-1}AP$ により計算できる.

$$2.^\dagger (1) \begin{pmatrix} 21 & -8 & 12 \\ 10 & -3 & 6 \\ -25 & 10 & -14 \end{pmatrix} (2) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(考え方) 問題 1 と同様の問題であるが, 本問の場合は行った先の空間が元の空間と同じものを指定しているので, $Q = P$ として考えることに注意が必要. したがって, P を基底ベクトルを並べた行列とすれば $P^{-1}AP$ を計算すればよい.

$$3. (1) h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x) \text{ (} p, q \text{ は多項式) とおいて, } T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x)) \text{ を満たすことを確認する.} (2) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} (3) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(考え方) (2) は基底毎に調べる. (3) は定理を用いても良いが, この場合は直接調べるほうが楽である.

$$4.^\dagger (1) \text{ 下記参照. } (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} (3) \text{ rank } T = 3, \text{ null } T = 0.$$

(1) 多項式 $p(x), q(x)$ およびスカラー λ, μ に対して,

$$\begin{aligned} T(\lambda p(x) + \mu q(x)) &= (x+1)^2 \left(\lambda p\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \mu q\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \right) \\ &= \lambda \cdot (x+1)^2 p\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \mu \cdot (x+1)^2 q\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \\ &= \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x)) \end{aligned}$$

より線形写像である. (2) $x^2 \mapsto (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$; $x \mapsto (x-1)(x+1) = x^2 - 1$; $1 \mapsto (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$ であるので, この線形変換の標準基底に関する表現行列は $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. (3) この行列を簡約化すると $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ となるので階数は主成分の数であるので 3. 退化次元は, 次元公式より $3 - 3 = 0$ となる.

5.* (1)(\Rightarrow) V の基底を v_1, \dots, v_n とすれば, T の全射性から, ある u_j が存在してそれぞれ $T(u_j) = v_j$ となるので $\dim \text{Im } T \geq \dim V$. また $\text{Im } T$ は V の部分空間なので

$\dim \operatorname{Im} T \leq \dim V$ である . したがって $\dim \operatorname{Im} T = \dim V$.

(\Leftarrow) 部分空間の次元が全空間と一致しているならば , その部分空間は全空間と一致する (10 月 31 日の問題 6 (2)) ので , $\operatorname{Im} T = V$.

(2)(\Rightarrow) 単射性より明らか . (\Leftarrow) U の二元 u, u' を任意にとる . このとき $T(u) = T(u')$ とすると , T の線形性より

$$0_V = T(u) - T(u') = T(u - u').$$

ここで $\ker T = \{0_U\}$ であることより , $u - u' = 0_U$, つまり $u = u'$ であるので , T は単射となる .

(3) 基底を一つ選び , そのときに現れる列ベクトルを対応させる線形写像により , 同型となる .

線形代数学・同演習 B

演習問題 7

1. 計算の仕方は, 11 月 21 日分の小テストの解答を参考のこと.

- (1) 固有値 $\lambda = 5$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = -3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$
- (2) 固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (3) 固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (4) 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.†

- (1) 固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = -2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$
- (2) 固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (3) 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (4) 固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- (5) 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
- (6) 固有値 $\lambda = -2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

11 月 21 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

- (7) 固有値 $\lambda = 3$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 (8) 固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$
 (9) 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = -1$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

3.†

- (1) 固有値 $\lambda = i$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = -i$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
 (2) 固有値 $\lambda = 1 + i$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = 1 - i$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$
 (3) 固有値 $\lambda = 2$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$
 固有値 $\lambda = 0$ に対応する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$

4. (1) $t^3 - 21t - 68$, (2) $t^3 + 4t^2 - 4t - 21 = (t+3)(t^2 + t - 7)$, (3) $t^3 + 2t^2 - 7t - 48$.

5. $g_A(t) = \det(tE_3 - A)$ を地道に計算すればよい. t についての次数比較を行うと楽.

6.* $S = A + 2E_2$, $T = (-A + 8E_2)/23$.

$p(t) = 2t^2 - 12t^3 + 19t^2 - 29t + 37$ とおく. $g_A(t) = t^2 - 6t + 7$ であるが, $p(x) = (t^2 - 6t + 7)(5 + 2t^2) + (2 + t)$ であることより. また, S に関しては $S^2 - 10S + 23E_2 = O$ が成り立つので, $-23E_2 = S(S - 10E_2)$, つまり $S^{-1} = -(S - 10E_2)/23 = (-A + 8E_2)/23$.

線形代数学・同演習 B

演習問題 8

1. (1) $W(1; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $W(-1; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$
(2) $W(2; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, $W(-1; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2.[†] (1) \bigcirc (2) \times (3) \bigcirc (4) \times

(1) $v, v' \in \text{Im}(T)$ とすると, $\text{Im}(T)$ の定義より, $v = T(u)$, $v' = T(u')$ となる $u, u' \in V$ が存在する. このとき, T の線形性から

$$T(u + u') = T(u) + T(u') = v + v', \quad T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda v$$

なので, $v + v' \in \text{Im}(T)$, $\lambda v \in \text{Im}(T)$ である. また, $0_V = T(0_V)$ であることより $0_V \in \text{Im}(T)$ なので, $\text{Im}(T)$ は V の部分空間となる.

(2) $v, v' \in \text{Ker}(T)$ とすると, 定義より $T(v) = 0_V$, $T(v') = 0_V$ となる. このとき, T の線形性から

$$T(v + v') = T(v) + T(v') = 0_V, \quad T(\lambda v) = \lambda T(v) = 0_V$$

なので, $v + v' \in \text{Ker}(T)$, $\lambda v \in \text{Ker}(T)$ である. また, $T(0_V) = 0_V$ であることより $0_V \in \text{Ker}(T)$ なので, $\text{Ker}(T)$ は V の部分空間となる.

(3) $p(x), q(x) \in W$ とすると, $T(p(x)) = x$, $T(q(x)) = x$ である. しかし, T の線形性より $T(p(x) + q(x)) = x + x = 2x \neq x$ であるので, $p(x) + q(x) \notin W$ である. よって, W に属する多項式の和が W に属さないもので, W は部分空間ではない.

3. (i) (1) $g_{T_1}(t) = t(t-1)$, (2) $g_{T_2}(t) = (t+1)(t-1)$.

(ii) (1) $W(0; T_1) = \text{Span}(1)$, $W(1; T_1) = \text{Span}(x)$

(2) $W(1; T_2) = \text{Span}(x+1)$, $W(-1; T_2) = \text{Span}(-x+1)$

4. 固有値について (1) $1, a$, (2) $1, a, a^2$, (3) a^i ($i = 0, 1, \dots, n$). 固有空間は

(1) $W(1; T_1) = \text{Span}(1)$, $W(a; T_1) = \text{Span}\left(x + \frac{b}{a-1}\right)$

(2) $W(1; T_2) = \text{Span}(1)$, $W(a; T_2) = \text{Span}\left(x + \frac{b}{a-1}\right)$, $W(a^2; T_2) = \text{Span}\left(\left(x + \frac{b}{a-1}\right)^2\right)$

(3) $W(a^i; T_n) = \text{Span}\left(\left(x + \frac{b}{a-1}\right)^i\right)$ ($i = 0, 1, \dots, n$)

- 5.[†] 次の通り.

(1) $W(1; T) = \text{Span}(-3x^2 - 5x + 1)$,

$W(-2; T) = \text{Span}(x)$,

$W(3; T) = \text{Span}(-2x^2 - 3x + 1)$.

$$\begin{aligned}
 (2) \quad W(1; T) &= \text{Span}(-2x^2 + 3x + 1), \\
 W(-2; T) &= \text{Span}(-x^2 + 2x + 1), \\
 W(4; T) &= \text{Span}(-2x^2 + x).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad W(1; T) &= \text{Span}(x^2 + 5x, x^1 + 1), \\
 W(2; T) &= \text{Span}(x^2 - x + 1).
 \end{aligned}$$

6. $\det(XY) = \det(YX)$ を用いる .

$$\begin{aligned}
 g_{AB}(t) &= \det(tE - AB) = \det(A(tA^{-1} - B)) \\
 &= \det((tA^{-1} - B)A) = \det(tE - BA) = g_{BA}(t). \quad \square
 \end{aligned}$$

線形代数学・同演習 B

演習問題 9

1. (1) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (2) 対角化できない,
 (3) $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (4) 対角化できない,
 (5) $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, (6) 対角化できない,
 (7) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, (8) $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

2.† $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおく. $PD = AP$ の各成分を比較する.

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = AP.$$

(2, 1) 成分を比較すると, $\lambda = 1$ または $c = 0$ でなければならないことが分かる. ここで $c = 0$ とすれば (1, 1) 成分の比較で $\lambda a = a$ であるが, P は正則なので $a = c = 0$ にはなりえない. よって, いずれの場合も $\lambda = 1$ となる. 同様に (2, 2) 成分と (1, 2) 成分を見ることにより $\mu = 1$ となることが分かる. しかし, (1, 1) 成分と (1, 2) 成分を見ると, $c = d = 0$ でなければならないが, これは P が正則であることと矛盾する. よって, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化することができない.

- 3.† (1) $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, (2) 対角化できない,
 (3) $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

4. (1) 行列のトレースの次の性質 $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ を用いる. $A = PDP^{-1}$ (D は対角行列で, λ_1 が m_1 個, \dots λ_r が m_r 個並んでいるもの) と書けるが,

$$\text{tr} A = \text{tr}(PDP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PD) = \text{tr}(D)$$

となることより.

(2) これも $\det(AB) = \det(BA)$ となることを用いれば, (1) と同様に示すことができる.

5.† A の固有多項式は $g_A(t) = t^2 - t - 1$. $g_A(t) = 0$ の 2 解を α, β とする. ただし $\alpha > \beta$ とする. α, β は A の固有値であるが, 対応する固有ベクトルはそれぞれ $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. そこで $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ とおけば,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

となる. これより

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる. さて, $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$ であることより,

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n \end{pmatrix}$$

となるので, 結局 f_n は以下ようになる:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

なお, 以上の変形では $\alpha\beta = -1$ や $\alpha^2 = \alpha + 1$ などのような関係式を用いている.

6. 固有値 λ_i の重複度を m_i で表す. 定義より $\sum_i m_i = n$ である. A は対角化可能なので, 適当な正則行列 P により $D = P^{-1}AP$ を対角行列とすることができる. この D の対角成分は各固有値 λ_i が m_i 個ずつ並んでいる. さて, $P = (p_1, \dots, p_n)$ とおけば,

$$AP = PD \iff Ap_j = \lambda_{i_j} p_j$$

であるので, P の各列はある固有値に対する A の固有ベクトルになっている. これより特に, 固有値 λ_i に対する固有ベクトルは m_i 本ちょうどあることが分かる. 固有空間の次元は, 線形独立な固有ベクトルの本数であったことを思い出せば, $\dim W(\lambda_i; A) = m_i$ であることがわかり, したがって $\sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; A) = n$ となることがわかる.

7.* $n_i = \dim W(\lambda_i; T)$ とし, $W(\lambda_i; T)$ の基底を $[u_1^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}]$ とする. 次のベクトルの組が線形独立であればよい:

$$[u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, u_{n_2}^{(2)}, \dots, u_1^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}]. \quad (1)$$

線形独立かどうかを確かめるために, 上のベクトルの組の線形結合を考える:

$$a_1^{(1)} u_1^{(1)} + \dots + a_{n_1}^{(1)} u_{n_1}^{(1)} + a_1^{(2)} u_{n_2}^{(2)} + \dots + a_1^{(r)} u_1^{(r)} + \dots + a_{n_r}^{(r)} u_{n_r}^{(r)} = \mathbf{0}.$$

簡単のため $w^{(i)} = a_1^{(i)}u_1^{(i)} + \cdots + a_{n_i}^{(i)}u_{n_i}^{(i)}$ とおけば, 上式は

$$w^{(1)} + \cdots + w^{(r)} = 0 \quad (2)$$

となる. ここで講義中の補題 9.1 より各固有空間同士の共通部分は $\{0\}$ のみである. したがって同じく講義中の補題 9.2 を適用することができて, 式 (2) より各 i に対して

$$0 = w^{(i)} = a_1^{(i)}u_1^{(i)} + \cdots + a_{n_i}^{(i)}u_{n_i}^{(i)}$$

となる. ここで $[u_1^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}]$ は $W(\lambda_i; T)$ の基底であるので, 上式を満たす $a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}$ は ‘すべて 0’ しかありえない. よって, 式 (1) のベクトルの組は線形独立であることが示された. 次元とはその空間における線形独立なベクトルの最大個数であったため, 少なくとも $n_1 + \cdots + n_r = \sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; T)$ 以上であることがわかる.

線形代数学・同演習 B

演習問題 10

多項式空間における標準内積を $(p|q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$ とする.

1[†] 与えた二つの多項式と直交する多項式を $f(x)$ で表す.

(1) $f(x) = x$, (2) $f(x) = 3x^2 - 1$, (3) $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$, (4) $f(x) = 5x^2 - 12x + 1$.

2. $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ と書けば $\langle A|B \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$ となるので, あとは簡単な計算により確認することができる.

3. 内積の性質を満たすことは, 例題と全く同様に示すことができる. 後半は, 例えば $p(x) = x$, $q(x) = x^2$ とすれば, $\langle p|q \rangle = 0$ であるのに対して, $\langle p|q \rangle_0 = 1/4$ であることなどから確認できる.

4[†] ならない. 例えば $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$ とすると $f \neq 0$ (零関数) であるが, $\langle f|f \rangle = 0$ となってしまう.

解説) 内積の条件のうち (1)-(3) までは一般の関数空間でも成立するが, 条件 (4) も成立するためには“連続性”が必要である. さて, 連続関数の空間は条件 (4) を満たすことの証明を, 厳密にやってみよう. 条件 (4) は $v \neq 0_V$ ならば $\langle v|v \rangle > 0$ であった. 関数における零元は‘常に 0 である関数’であったので, ある関数 f が零元でないとする. $f(a) \neq 0$ となるような点 $a \in [-1, 1]$ がある. ここで $\langle f|f \rangle = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$ について考える. 被積分関数 $f(x)^2$ は連続関数であり, 特に $x = a$ において $f(a)^2 > 0$ である. ε - δ 論法において, $\varepsilon = f(a)^2/2$ とすれば, ある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$|x - a| < \delta \text{ のとき } |f(x)^2 - f(a)^2| < \frac{1}{2}f(a)^2, \text{ つまり } \frac{1}{2}f(a)^2 < f(x)^2$$

となることがわかる. ここで $f(x)^2 \geq 0$ であることより

$$\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)^2 dx > \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{1}{2}f(a)^2 dx = \delta f(a)^2 > 0$$

であるので, 結局 f が零関数でなければ $\langle f|f \rangle > 0$ となる.

以上のことは数学の厳密性についての紹介ですので, 試験でこれを要求することはありません.

5[†] (1) まず, 零元 0_V は常に $\langle 0_V|v \rangle = 0$ であることより, $0_V \in W^\perp$ である. また, $u, v \in W^\perp$ とすれば, 内積の線形性から, 任意の $w \in W$ に対して

$$\langle \lambda u + \mu v | w \rangle = \langle \lambda u | w \rangle + \langle \mu v | w \rangle = 0$$

1 月 9 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

となるので, $\lambda u + \mu v \in W^\perp$ である. よって, W^\perp は V の部分空間となる.

(2) W および W^\perp がともに部分空間であることから $W \cap W^\perp \supset \{0_V\}$ は明らか. $w \in W \cap W^\perp$ とする. このとき $\langle w | w \rangle$ を考える. 左の w を W^\perp の要素, 右の w を W の要素と思えば, $\langle w | w \rangle = 0$ となることが分かる. 内積の定義より, 同じものの内積をとって 0 になるのは零元 0_V だけであつたので, $w = 0_V$ となる. これより $W \cap W^\perp \subset \{0_V\}$ となり, 結局 $W \cap W^\perp = \{0_V\}$ を得る^{*1}.

6.[†] (1) $\langle s_n | c_m \rangle = 0$, (2) $\langle s_n | s_m \rangle = \delta_{nm}$, (3) $\langle c_n | c_m \rangle = \delta_{nm}$ (δ_{nm} は Kronecker のデルタ).

(1) 被積分関数 $\sin nx \cos mx$ は奇関数なので.

(2), (3) 三角関数の和積の公式

$$\sin nx \sin mx = \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2},$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x}{2}$$

と, 次の積分を合わせると得られる:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & (k \text{ は } 0 \text{ でない整数}), \\ 2\pi & (k = 0). \end{cases}$$

^{*1} 集合 A, B が等しいことを示すためには $A \subset B$ かつ $A \supset B$ を示す事が必要.

線形代数学・同演習 B

演習問題 11

1. (1) $\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ (3) $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2.† (1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (2) $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ (4) $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.† (1) $u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, u_3(x) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3x^2 - 1)$

(2) $u_1(x) = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2, u_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, u_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-5x^2 + 3)$

(3) $u_1(x) = -\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x, u_2(x) = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2, u_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(5x^2 - 3)$

4. $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ とおく．まず $\|\mathbf{u}_1\|^2 = a^2 + b^2 = 1$ なので $a = \cos \theta, b = \sin \theta$ とおく．ここで $\langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2 \rangle = 0$, つまりベクトル \mathbf{u}_1 と \mathbf{u}_2 は直交しているので , \mathbf{u}_2 は $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ と平行である．そこで $\mathbf{u}_2 = \alpha \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$ とおけば $\|\mathbf{u}_2\| = 1$ より $\alpha = \pm 1$ となるので結論を得る．

5. $P = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ が直交行列であることと $[\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2]$ が正規直交基底であることが同値であること , および先の問題より \mathbb{R}^2 の正規直交基底が全て求まっていることより ,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 6.† $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ とし , $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ に対して Gram-Schmidt の直交化法を適用する．
 そうして得られた \mathbf{u}_i は , $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ を用いて

$$\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{a}_3 - \beta \mathbf{a}_2 - \gamma \mathbf{a}_1$$

のように書ける．ただし λ_i や α, β, γ は $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ の内積などを用いて書ける量である (正確に書くと読みづらいのでこのように書いた)．すると ,

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3] \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\alpha & -\gamma \\ 0 & \lambda_2 & -\beta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

1 月 16 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , † は特に解いてほしい問題 , * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

と書けるが, $P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$ は直交行列であり, $U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\alpha & -\gamma \\ 0 & \lambda_2 & -\beta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$ は上三角行列であるので, $A = PU$ のように表すことができる.

$$7^* \quad (1) \quad H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2,$$

$$H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$$

(2) $\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = p_n(x) e^{-x^2}$ ($p_n(x)$ は n 次の多項式) となることを示せばよい. これは帰納法で簡単に示すことができるので略.

(3) 例題 10.3 とほぼ同様に示すことができる.

(4) 被積分関数が

$$H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} = (-1)^n \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) H_m(x)$$

のように書けることに注意. 簡単のため $n \geq m$ と仮定する. 部分積分を繰り返し行うことにより,

$$\begin{aligned} & (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) H_m(x) dx \\ &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right) H_m^{(1)}(x) dx \\ &= \cdots = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2} \right) H_m^{(m)}(x) dx \end{aligned}$$

を得る. これより $n > m$ ならば 0 となることが分かる. つまり, この内積に関して多項式 $H_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は互いに直交している. 因みに $n = m$ とすれば $2^n(n!) \sqrt{\pi}$ となる.

線形代数学・同演習 B

演習問題 12

1. $(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2$ を確かめればよい.
- 2.[†] (1) \times (固有値は $1, 2, -1$) (2) \bigcirc (固有値は $4, 4, 1$) (3) \times (固有値は $7, -2, -2$)
下の問題 5 より, 正定値ならば対角成分は常に正になることがわかるので, 対角成分が負ならば正定値にはなれない.
3. (1) エルミート内積を $(\cdot|\cdot)$ とする. 交代行列 X の固有値を μ , 固有ベクトルを x とすれば,

$$\mu(x|x) = (Xx|x) = (x|^t Xx) = (x| -Xx) = -\bar{\mu}(x|x)$$

なので $\mu = -\bar{\mu}$, つまり μ は純虚数 (もしくは 0) である.

(2) λi に対応する固有ベクトルを x とすると $Xx = \lambda i x$ であり, この式の両辺の複素共役をとることにより

$$\overline{Xx} = \overline{\lambda i x} \Leftrightarrow X\bar{x} = -\lambda i \bar{x}.$$

(3) (1) より交代行列の固有値は純虚数か 0 であるが, (2) より 0 でない純虚数は \pm が必ず対となる. したがって, n が奇数ならば少なくとも 1 つは固有値 0 を持つことになる. 一方, 行列式は固有値の積として得られるので, 奇数次の交代行列の行列式は必ず 0 になる.

- 4.[†] (1) \Rightarrow (2) A の固有多項式は $g_A(t) = t^2 - (a+c)t + (ac-b^2)$ であるので, 固有値は

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \quad (3)$$

となる. これが正なのだから

$$(a+c)^2 - ((a-c)^2 + 4b^2) = 4(ac-b^2) > 0,$$

つまり $ac-b^2 > 0$ を得る. これより特に a と c は同符号であるが, 式 (3) より $a > 0$ がわかる. (2) \Rightarrow (1) は逆を辿ればよい.

$$5.[†] $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(ac-b^2)/a} \end{pmatrix}.$$$

$L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$ とおいたとき, $L^t L = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2+z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ なので, x, y, z を a, b, c で表せばよい. 問題 4 より $a > 0, ac-b^2 > 0$ なので根号を取れることに注意.

1 月 24 日分 (凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017LA.html>

6. ${}^t(AX) = {}^tX {}^tA = -XA$ であることより

$$\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}({}^t(AX)) = -\mathrm{tr}(XA).$$

ここで $\mathrm{tr}(AX) = \mathrm{tr}(XA)$ であることを用いると, $2\mathrm{tr}(AX) = 0$ を得る.

7* (1) 例題 10.3 とほぼ同様. 正値性条件も $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{x} \rangle_0 = \lambda x^2 + \mu y^2$ であることより明らかであろう.

$$(2) \tilde{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^{-1} {}^tX \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ とおいたとき, $\langle \boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = (x, y) D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とかけることより

$$\langle X\boldsymbol{x} | \boldsymbol{y} \rangle = (x, y) {}^tX D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) D \cdot \underline{D^{-1} {}^tX D} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$(3) {}^tP \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

条件は $\tilde{P}P = E_2$ であるが, (2) よりこれは $D^{-1} {}^tP D \cdot P = E_2$ となるので.

8* Jacobian を J とすれば, $J = |\det A|$ となる. したがって, A が直交行列ならば $J = 1$ である.

線形代数学・同演習 B

演習問題 13

$$1. (1) P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$(3) P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(4) P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(5) P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$2.^\dagger (1) P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(2) P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(3) P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(4) P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(5) P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(6) P = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- 3* (1) $A = (a'_{ij})$, $a'_{jj} = a_{jj}$ ($j = 1, \dots, n$), $a'_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$ ($i \neq j$) とすれば A は対称行列であって $f(x) = {}^t x A x$ となる. (2) $f(x) = {}^t x A x$ において $y = Sx$ を代入すれば $f(y) = {}^t (Sy) A Sy = {}^t y {}^t S A S y$ となることより. (3) 対称行列は直交行列により対角化できることと (2) より.
- 4* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ とおく. (1) A は対称行列なのである直交行列 P により $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^t P$ とかける. ここで λ, μ は A の固有値である. ここで $\lambda, \mu > 0$ であることと $\det A = \lambda\mu$ であることに注意. さて

$$ax^2 + 2by + cy^2 = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t [{}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} [{}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$$

なので $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ という変数変換を考える. ${}^t P$ は正則な行列であり (x, y) に関する積分領域は \mathbb{R}^2 全体なので, (u, v) に関する積分領域も \mathbb{R}^2 全体である. また変数変換に伴う Jacobian は 1 であるので,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda u^2+\mu v^2)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu v^2} dv \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} \end{aligned}$$

(2) $A = L {}^t L$ とおけば, 1 月 24 日の演習問題 5 より $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(\det A)/a} \end{pmatrix}$ である. さて

$$ax^2 + 2by + cy^2 = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t \left[{}^t L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] {}^t L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^t L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ という変数変換を考える. ${}^t L$ は正則な行列であり (x, y) に関する積分領域は \mathbb{R}^2 全体なので, (u, v) に関する積分領域も \mathbb{R}^2 全体である. また変数変換に伴う Jacobian は 1 月 24 日の演習問題 8 により $\det L^{-1} = 1/\sqrt{\det A}$ であることがわかっている. よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$

- 5* (1) $\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$