

微分積分学・同演習 A

4月11日分 質問への回答

質問 \forall の記号が意味しているものがわかりません。

質問 \forall がさらっととばされてびっくりしま

- ごめんなさい，気を付けていたのですが無意識のうちに使っていました．‘All’ あるいは ‘Arbitrary’ の頭文字から来たもので「すべての」とか「任意の」を表す略記号です．

質問 次回もっと集中して解きます。

- 小テストの時間はちゃんと確保するように努力します．

質問 板書に必死で内容があまり理解できなかった。

- どうしても板書は多くなってしまうと思いますので，電子機器等もうまく活用してください．

質問 例題が難しかったので家で復習しようと思います。

- ε - N 論法は慣れるまでに時間が掛かるとは思いますが，やっている事自体は単純ですので，じっくり時間を掛けて考えるのが良いでしょう．

質問 P12 の定義 2.3 が分かりません。

- 「数列と極限值との距離がいくらでも小さくなる」ということを現代数学風に言い換えるところなる，というものです．いくらでも小さくなるということは，与えられたどんな小さな正の数よりも，ある番号から先の a_n に対しては極限值との距離が小さくなっているはずで，それを「与えられたどんな小さな正の数 $= \varepsilon$ 」と「ある番号 $= N$ 」を用いて表現したのがこの定義 2.3 です．

質問 難しいです。

質問 むずかしすぎる．

質問 初日から難しかった。

質問 難しかったです。

質問 むずかしかったです。

- ε - N 論法は多くの大学生が苦戦しているようですので，今分からなくても心配することはありません．次のように段階を踏んで理解していけば良いと思います：

1. 現代数学では極限を ε - N 論法という手法で定義していて，そのおかげで厳密性が保証されている，ということを理解する；
2. 簡単な数列の極限を ε - N 論法を用いて示すことができる (ε の意味やなぜ N をとるのかといったことは置いておいて)；
3. ε - N 論法において， ε の意味やなぜ N をとるのかということを理解する．

質問 スピードが速いです．

質問 早かったです．

- よく言われるのですが，内容が多いのでどうしても速くなってしまいます．

質問 大学数学!!って感じでした．

- 大学数学の面白いところは少し先になります．楽しみにしていてください．

微分積分学・同演習 A

4月18日分 質問への回答

質問 $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ や $\forall \varepsilon_1 > 0$ の使い方がわかりません。(いつ、何のために.)

- $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ は“ある自然数 N_1 が存在して...”と読み替えてください。また $\forall \varepsilon_1 > 0$ は“任意の正の数 ε に対して”と読み替えてください。毎回このように板書で書くのはすごく大変なので、申し訳ありませんが、このような略記号を使わせてください。記号の使い方などは教科書 p.6 にもありますので、こちらも参考にしてください。

質問 有界がわかりません。

- 大雑把に言ってしまうと、 $+\infty$ にも $-\infty$ にもいかないような数列のことです。

質問 大変 (大学は)

- 大学の講義は一度で入ってくる情報が多いので大変ですが、がんばってください。

質問 ないです。

- はい。

質問 特にありません。

- はい。

質問 全くついて行けなかったので復習がまります。

質問 むずかしすぎる

- 今日の講義の内容は、一見難しそうに見えますが、実は今まで当たり前に使ってきた極限の性質を改めて ε - N 論法で証明しただけです。今まで証明できなかった $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \alpha \beta$ も、 ε - N 論法を用いれば示すことができるようになったことは是非抑えておきましょう。

質問 もうすでに構義についていけない気がしてきました。

- 一つ上の回答も参照のこと。ちなみに‘講’義です。

質問 小テストの問題を解くときに、ノートを見ると解くことができますが、何も見ずに解くとなるととても難しくなります。また、授業の進むスピードがとてもはやく理解する前に次にいってしまうことが少しありました。

- 教科書の問題や演習問題を解いて、何をしているのかを理解することが大事です。大学の講義では一度に多くのことが出てきますので、予習しておくとういと思います。次回の講義範囲はホームページに載せています。

質問 例題で数字が見れてよかった。

- そういえばほとんど一般論でしたね...もう少しこういう状況が続きます。

質問 期末テストの対策や普段の家庭での問題演習はどうすればいいですか。

- 配布している演習問題や、教科書にある問題を利用するといいです。配布の問題も解答を用意しますので、こちらをご利用ください。ただ、解答の準備に1週間ほど時間がかかります。

質問 ε - N 論法ってなんか自由度が高いような...。今回の授業は少し難しい(と感じた)上に、範囲が広がったので、1つ1つかみくだきながら...のりこえようと思います。

- 自由度は ε - N 論法の強みの一つですが、高校までの数学では現れなかったものなので戸惑ってしまうかもしれません。難しさもここに起因するものなので、じっくり何をしているのかを考えるとよいでしょう。

質問 この、教科書やノートを見ながらの小テストに不安を感じる。この先自分は本当に ε - N 論法を理解できるのか...

- ε - N 論法は、どんな誤差の幅 ε に対しても、それを保証する N を見つけることができるということです。これは単に今までの極限を言い換えたものなので、じっくり考えることで少しずつ分かってくるとと思います。

微分積分学・同演習 A

4月25日分 質問への回答

質問 $x \rightarrow 2$ のとき 0 に収束しないことを考えるから, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 0$ で話を進めるんじゃないですか?

— 違います. 関数 $f(x)$ が点 $x = a$ で連続であることの定義は, $x \rightarrow a$ の極限が存在してそれが $f(a)$ に一致することですので, まずは $(f(a)$ の値とは無関係に) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ を計算して, その後で値 $f(a)$ と比較するのです.

質問 今日の講義の使い方がわかりませんでした. おしえてほしいです.

— 小テストの極限 ($\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$) を ε - δ 論法で書くと, 次のようになります.
 $\varepsilon > 0$ を任意にとる. このとき $\delta = \varepsilon$ ととれば, $0 < |x - 2| < \delta$ のとき

$$\left| \frac{x^2-4}{x-2} - 4 \right| = |x-2| < \delta = \varepsilon$$

であるので, $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4$ となる. 今 $f(2) = 0$ なので $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} \neq f(2)$ ゆえ f は点 $x = 2$ で連続でない.

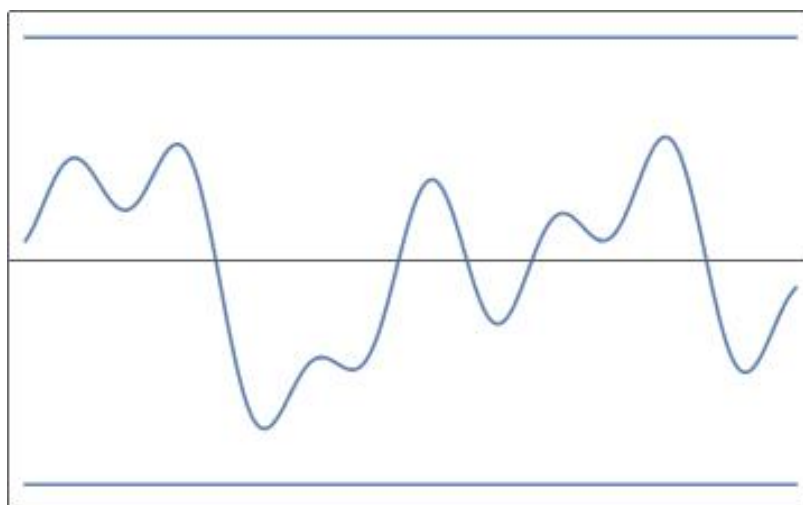
一般の関数では $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ の値 (そもそも存在しないこともある) と $f(a)$ の値とは独立なので, はじめから $|f(x) - f(2)| < \varepsilon$ とすると上手くいきません. ちなみに関数 $f(x)$ が $x \rightarrow a$ のときにある数 b に収束しないことを ε, δ を用いて表せば

ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して, どんな正の数 $\delta > 0$ に対しても $0 < |x - a| < \delta$ かつ $|f(x) - b| \geq \varepsilon$ となる

ですが, 論理記号が入った式の否定は慣れていないと少し難しいので, これは講義では (今のところ) 紹介していません.

質問 Def 3.9 関数 $f(x)$ が区間 I で有界 $\Leftrightarrow \exists M > 0$ s.t. $|f(x)| < M$ がよく分かりません.

— 大雑把なイメージで言うと, 下図のように上と下に境があって, そこから大きく (小さく) なることはないということです.



質問 $\delta = \min(\bigcirc, \triangle)$ の意味がわかりませんでした.

質問 $\delta = \min(\bigcirc, \triangle)$ ← この記号の意味を知りたい

— $\min(a, b)$ は a と b のうちで小さい方を選ぶというものです. たとえば $\min(2, 3) = 2$ です. また, $\min(1, a)$ だったら, $a \leq 1$ のときは $\min(1, a) = a$, $1 < a$ のときは $\min(1, a) = 1$ になります.

質問 難しい

質問 (^ω^) わかんね

— 小テストの時間にも言いましたが, 関数の極限も ε - δ 論法を用いて厳密に定義しなおしましたが, 実際の計算は, 多くの場合は高校までの手法が使えます. もちろん ε - δ 論法を用いないとうまくいかない時もありますの

で，そのような場合にも困らないように ε - δ 論法で定義しなおす必要がありました．

質問 定義しなおした方も理解はできるのですが，やっぱり抽象度が抜けてないと感じます。仕方ないのですかね。

— 抽象度は抜けません．というよりも，抽象化することによって厳密性や汎用性を獲得した，という方がよいかもしれません．

質問 なし．

— はい．

微分積分学・同演習 A

5月9日分 質問への回答

質問 単位が取れるか不安になった。

- 不安になるのがちょっと早いです。次回から微分に入りますので、これまでの話よりもとっつきやすいかと思っています。

質問 (1) が全く分かりません！

- ・ (1) の方法が全く分かりません
- ・ わかんない。
- ・ 分かりませんでした。
- ・ わかりません。
- ・ すみません...全部は解けませんでした。
- 上界を探すのが難しかったですね。ノーヒントだと厳しかったかもしれません。

質問 (^ω^) むずい

- ・ ムズい。
- 頑張っつついてきてください。この日の講義で特に抑えておくべきことは、「実数と有理数との違い」、「有界な単調列は収束する」、「中間値の定理」と「有界閉区間の連続関数は最大値と最小値を持つ」ということです。

微分積分学・同演習 A

5 月 16 日分 質問への回答

質問 中間試験では配布されたプリント以外に勉強すべきことはありますか。

— 教科書もよく読んでおきましょう。

質問 計算が遅くなっていた。

— 計算力は、維持しようと努めていないとどんどん落ちてしまいます。気を付けましょう。

質問 前回より理解できた気がした。

質問 いつもより理解できて嬉しかった

質問 今回はそれとなくわかりました！

— 抽象的な話は前回までなので、これからはイメージもつかみやすくなると思います。

質問 5 月 9 日分の小テストの解答が一つ前の解答になっています。

— 教えていただきありがとうございます。修正しておきました。

質問 \ (^o^) /

— えーと...組版ソフトの関係でうまく描けません。

微分積分学・同演習 A

5 月 23 日分 質問への回答

質問 双曲線余弦、正弦、(正接) はどのようにしてあのように定義されたのでしょうか。私、気になります！

- 双曲線余弦は、カテナリー (懸垂線) と呼ばれていて、それは紐を吊るしたときにできる曲線です。元々はこのようなところから (双曲線とは無関係のところ) 現れた曲線^{*1}ですが、これが不思議なことに三角関数と類似の性質を多く持っており、さらに双曲線と関係していることも判明していったという歴史があります。その類似を持つ理由は、複素変数で考えると明白になります：三角関数を複素変数で考えると指数関数を用いて

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

と表すことができます (Euler の等式)。これより特に

$$\cosh x = \cos(ix), \quad \sinh x = -i \sin(ix)$$

とかける。これが双曲線関数と三角関数が類似の性質を持つ理由になります。

最後のフレーズは古典部シリーズでしょうか。古典部シリーズといえば面白い話が一つ：一反田 A, 二反田 B, 三反田 C, ...と続けていったときに千反田は何になるでしょう^{*2}。

質問 今さらですが Rem, Prop, Thm の意味を教えてください。

- それぞれ次のとおりです：

Rem Remark 注意

Prop Proposition 命題

Thm Theorem 定理

定理・命題・補題は、確固とした線引きがあるわけではないですが、一般的には「定理 \geq 命題 \geq 補題」という重要度です。

質問 高校でやった内容に近くて少し、安心しました。

- 前期で残っているのは、次回の Taylor 級数展開と種々の積分なので、この後の講義内容は高校でやった数学に近いです。安心してください。

質問 (´・`・`)

- しょぼーん

^{*1} 17 世紀後半に Johann Bernoulli(かの有名な Euler の師), Leibniz が (おそらく) 独立に得た。

^{*2} Z の次は A に戻るとする。

微分積分学・同演習 A

5 月 30 日分 質問への回答

質問 Taylor の定理って何に使えるんですか。

- Taylor の定理は，一般の関数を多項式で近似できるという点が非常に重要です．高校の教科書に $\sin 1^\circ$ や $\cos 1^\circ$ などの数表がありませんでしたか．昔は，この理論を用いてそういった数表が作られていました．

質問 理解ができなかった。

- すこし急ぎすぎました．次回しっかりと補足したいと思います．

質問 ムズい

- 教科書をよく読んでおきましょう．

質問 千坂田 L！になりました！感動です！

（今日の講義は途中でつまづきました...）

- 初めてこれを聞いたとき，妙に感心してしまいました．あと坂じゃなくて反です．
今日の講義内容は，次回にしっかりと補足したいと思います．

質問 めんどいです（° °）

- n 次導関数を計算しなくても Taylor 多項式を計算できることがあります．次回，それを簡単にですが紹介します．

微分積分学・同演習 A

6月6日分 質問への回答

質問 order って結局何ですか．

質問 分かりませんでした。

質問 ムズすぎ

- 関数の極限を考えるときの 0 に収束する速度の目安です．初めて出てきた概念なので，とっつきにくいかもしれませんが．高校などで \asymp といった記号を用いたと思いますが，それをより正確に書いている感じです．

質問 オーダー！

やっと思いが理解できました！

- それはよかったです．慣れるととても便利な記号です．

質問 (^_^;)

- ぱりぱり.....組版ソフトの都合で上手く出力できません．

質問 ニャンパスー

- にゃんぱすー

微分積分学・同演習 A

6 月 20 日分 質問への回答

質問 期末テストはもっと頑張ります。

- ・ 期末テストは事前にもっとしっかり勉強してのぞみます！
- 配布している演習問題を解けるようになっておいってください。

質問 次の授業を参考にレポート作成でよろしいのでしょうか？

- それでも構いませんが、自分の言葉で書くようにしてください。板書をそのまま書いたようなレポートは、作り直して再提出していただくことになっています。

質問 小テストのレベルは試験のレベルじゃないんですね。あ、甘く採点していただいてありがとうございます。勉強します。

- それだとわざわざ貴重な講義の 1 コマを使って試験を実施する意味がないでしょう。

質問 早いです。

- この日の講義は高校の内容と重複するものが多かったので、少し内容を詰めました。

質問 分からない所が多いので演習問題の解答をもっと丁寧にしてほしいです

- ・ 演習問題の解答を丁寧に書いてほしいです。わからないので。
- 分からないのならば、まず、どこまで分かっているのか、分からないと感じる原因は何か、どうすれば分かるのか、といったことを自分で考えるようにしてください。それでも分からないときには、質問欄やメール、もしくは直接質問するなどしてください。大学は手取り足取り教えてもらう場所ではなく、自分の力で勉強できるようになるための場所です。

質問 今回の講義内容はいつもより理解できたので嬉しかった。テストがあまり良くなかったので期末頑張りたい。

- それは良かったです。積分の再構成はここで扱ったリーマン積分の他に、ルベーグ積分というものがあります。現在の主流は後者ですが、その定義は非常に抽象的です（だからこそ主流になっているともいえますが）。いつか別の講義でルベーグ積分を習うと思いますので、そのときのためにもリーマン積分をしっかりと覚えておきましょう。

質問 ああああ

- 落ち着いてください。

質問 「月がきれい」を今期見わすれたので悲しいです。

- 後で一気に見る楽しみができたと思えば。

微分積分学・同演習 A

6 月 27 日分 質問への回答

質問 テストなどで積分定数 C は書くべきですか？

— 注意事項にも書く予定ですが、書かなくても構いません。ただし、頭の中では常に積分定数を省略して書いているんだということを忘れないようにしておいてください。微分方程式を扱う際には必要になってきます。

質問 部分分数分解って分が 3 度も使われてて奇跡的だと思う。

— 構成している漢字の半分が同じ文字というのは非常に珍しいですね。四字熟語ではそれなりにありますが、六字の場合は他にもあるのでしょうか。

質問 教科書の言ってることはわかりにくかったですが、先生の言ってることはわかりました。

— それは良かったです。しかし、わかりやすいということは細かいところを端折っているということでもあります。その点は気をつけてください。

質問 E マンガ先生の最終回が思ったより神回だったので E マンガ先生は神作品 Q.E.D.

— その作品は見てないですね。「思ったより神回だったので」だと、そこまで良い作品だったようには聞こえませんが...

質問 眼鏡のレンズの買^{*3}替えてドコが一番ヤスいですか？

— 残念ながらあまり詳しくないです。眼鏡は中学入学あたりから使っていますが、今かけているものは三代目ですし(確か)、頻繁に買い換える方ではないので。

^{*3} 判読できなかったので推測で書きました。

微分積分学・同演習 A

7月4日分 質問への回答

質問 例題 11.1 で $y = t(x+1)$ がどこからきたのかわかりません

また例題 11.2 の前の②の説明 $\left(\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\right) = \frac{1 \pm \cos 2x}{2}$ がよくわかりません

- まず一つ目から．確かになぜこの直線を考えてうまくいくのかについては全く触れませんでした．これは少し難しい(というよりも全く別の動機から現れる)のですが，この直線はピタゴラス数を探す際に現れてくるものです．ピタゴラス数とは自然数の三つ組 (a, b, c) で $a^2 + b^2 = c^2$ を満たすもののことですが，この両辺を c で割ってやれば $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$ となるので，半径 1 の円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある点のうち x, y がともに有理数になっている点(このような点を有理点という)を見つけることができれば，ピタゴラス数を見つけることができます．そこで，この円 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある有理点 Q を探すわけですが，この円上には 4 つの自明な有理点 $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(-1, 0)$ および $(0, -1)$ があります．ここで，その中の一つの点 $P = (-1, 0)$ をとる^{*4}と， P と Q を通る直線は有理数 t を使って $y = t(x+1)$ と書けるし，逆に $y = t(x+1)$ (t は有理数) という直線とこの円との交点は必ず有理点になります．円の方程式が 2 次の多項式であって係数が有理数であること，およびこの直線が必ず有理点 $(-1, 0)$ を通ることから，もう一つの交点の座標は t に関する有理関数で書けるということが導かれます．これが直線 $x = t(x+1)$ が出てきた理由です．
- 二つ目．これは三角関数の半角の公式

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

をまとめて書いたものです．このように $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ は $\cos 2x$ で書けるので， $t = \tan \frac{2x}{2} = \tan x$ と変数変換してもうまくいくということです．因みに，

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} = \frac{\sin 2x}{4(1 + \cos 2x)}$$

と $\tan x$ も $\sin 2x$, $\cos 2x$ で書けます．

質問 今回はわかりやすかったです。

- 計算を素早く正確にできるよう演習を忘れずに．

質問 分かりません。

質問 わかりませんでした。

- 広義積分は，問題が生じている箇所を避けて積分したあと，極限を取るという二段階のステップに分けられます．慣れるまで戸惑うかもしれませんが，がんばってください．

質問 5 限は授業なので，できれば，もう少しだけ軽い小テストでお願いします。私は頭が良くないものですから……。

質問 5 限があることを考慮されていらっしゃるように思えたので，そこを改善して小テストの時間をもっと長くってほしいです。まに合いません。

- 今回の小テストは少し欲張りすぎました．講義の最初の方で時間を掛けすぎたのが失敗でした．

^{*4} 別の点でも可能だが，慣習に従った．

微分積分学・同演習 A

7月18日分 質問への回答

質問 今回は自分のものにするのに少し時間がかかりそうだなと思いました．

・わかりませんでした。

— 収束・発散をそのまま確認できない広義積分でも，他の関数と比較することにより，収束・発散を判定できる
ということで発想は非常にシンプルです．計算には少し慣れが必要です．

質問 笑なし

— はい．

質問 ()

— ええと．

微分積分学・同演習 A

7 月 25 日分 質問への回答

質問 最終講義だと思ったのですが後期もあるそうなのでよろしくお願いします．秋シーズンが楽しみです．

- こちらこそ後期もよろしくお願いします．後期は多変数関数の微分および積分で，前期よりも複雑になっています．学ぶことが多く大変ですがその分面白い例も多いので楽しみにしておいてください．

質問 単位ください

- 別に出し渋っているわけではないのですが．

質問 (° °)

- 組版ソフトの関係でうまく出力できなくて悔しい．

質問 流星にまった～がって

- これまた懐かしい曲を．私が学生の頃の曲なのは．