

この微分積分学 A・B の講義の目標は、多変数関数の微分・積分を自在に扱えるようになることです。実際に多変数関数を扱うのは後期に入ってからで、前期は一変数関数のみを扱います。前期の前半は細かい議論が多くて退屈かもしれませんが、現代数学の厳密性の一端を感じるいい機会だと思って気楽に聞いてください。

大学の数学でよくわからないと言われることが多い ε - N 論法ですが、考え方自体は難しいものではありません。このように書き換えることのメリットは、講義中に述べた厳密性を保証するというだけでなく、「限りなく近づく」という極限操作を「任意に取った (有限の) 正の数 ε に対して番号 N が見つかる」というように有限の範囲で考えることができるということもあります¹⁾。また、せっかく極限を定義し直したわけですが、次回の講義において多くの場合は高校で習った方法で計算してもよいということをやります。ただしこれは ε - N 論法が必要ないというわけではないので、 ε - N 論法を使いこなせるようになりましょう。

この場所では講義の要約や補足、あるいは関連する話題を取り留めもなく書いていくつもりです。必ずしも役に立つ情報があるとは限りませんが、一読いただけますと幸いです。

¹⁾ この任意性が難しいと感じる原因のような気もしますが...

ε - N 論法 (あるいは来週出てくる ε - δ 論法) は (大学数学の) 初学者にとっては難しいもので、多くの大学生が苦戦しています。なので、今わからなくても心配することはありません。質問への回答でも触れましたが、次のように段階を踏んで少しずつ理解していけばよいかと思います。

1. 現代数学では極限を ε - N 論法という手法で定義していて、そのおかげで厳密性が保証されている、ということを理解する；
2. 簡単な数列の極限を ε - N 論法を用いて示すことができる (ε の意味やなぜ N をとるのかといったことは置いておいて)；
3. ε - N 論法において、 ε の意味やなぜ N をとるのかということを理解する。しばらく理詰めの話が続いて辛いかもしれませんが、頑張ってください。

小テストの解答例。

$$(\text{準備}) \quad \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

(証明)*¹ ε を任意にとる*²。このとき、 $N := \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ ($\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ よりも真に大きい最小の整数) とすれば、 $n \geq N$ のとき、

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \varepsilon$$

より、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ である。もちろん、この N の取り方はこれでなくてもよい。例えば $n \geq N$ のとき $n^2 \geq n \geq N$ なので、 $N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ としたとき $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ に注意すれば、 $n \geq N_0$ のとき

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

なので、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ が示される。

解答を見ていて多かったのが、「 $n^2 \geq N$ のとき」としているもの。ここは「 $n \geq N$ のとき」でないといけないところです*³。この誤差の幅を保証する N は誤差の幅 ε と、当然ながら考える数列に依存しますので、普通は問題毎に変わってきます。

*¹ 答案を書く際には、準備と実際の証明とをはっきりと分けて書くようにしましょう。

*² 答案には毎回 ε をどのように取ったのかを明記してください。

*³ 採点者はなぜかスルーしていましたが...(採点は TA の方にお願いしています)。

17 世紀後半に、ニュートン¹⁾・ライプニッツ²⁾らにより独立に微分積分学が創設されて以来、多くの数学者がその研究を行ってきた。その中でもオイラー³⁾の業績は素晴らしく、200 年以上経った現在でも色褪せることなく輝いている。しかし、極限に関する議論が曖昧なところもあり、そのことを問題視する数学者が現れるようになった。そうした風潮の中で、19 世紀半ば頃に、フランスの数学者コーシー⁴⁾やドイツの数学者ワイエルシュトラス⁵⁾らによって ε - δ 論法が導入され、洗練されていった。

参考文献。

[1] 高木貞治，近世数学史談，岩波書店。

¹⁾ Isaac Newton (1643–1727)

²⁾ Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716)

³⁾ Leonhard Euler (1707–1783): スイスの数学者。

⁴⁾ Augustin Louis Cauchy (1789–1857)

⁵⁾ Karl Theodor Wilhelm Weierstra (1815–1897)

前回に参考文献に挙げた近世数学史談について紹介：著者は高木貞治という数学者で，類体論を完成させたことで世界的に有名である．本書の舞台は 19 世紀のヨーロッパ．独特の語り口で，しかし軽快なリズムで，ガウス・アーベル・ガロアを始めとした数学界の巨人たちの人生を描いている．第一版は 1933 年 10 月の刊行であるが，その面白さは色褪せることはなく，「21 世紀に入って 10 余年がすぎた今もなお，(中略)『近世数学史談』を超えるものはありません¹⁾」とは，昨年九州大学を退官された高瀬正仁先生の言葉である²⁾．九州大学の図書館にも数冊蔵書があるので，興味のある人は一読してみてもいいかな．

¹⁾ 日本語で書かれた数学史を語る本において．

²⁾ 小谷元子編，数学者が読んでいる本ってどんな本，東京図書

前回の小テストの解答例．

$x \neq 2$ のとき $f(x) = x + 2$ なので， $f(x) \rightarrow 4$ ($x \rightarrow 2$)．しかし $f(2) = 0 \neq 4$ なので不連続．これを ε - δ 論法を使って書く： $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする．このとき， $\delta = \varepsilon$ とおけば， $0 < |x - 2| < \delta$ のとき $x \neq 2$ なので

$$|f(x) - 4| = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2| < \delta = \varepsilon.$$

これより $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq 0 = f(2)$ なので， f は $x = 2$ で不連続である．

関数 $f(x)$ のある点 $x = a$ における極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ は，その点での関数の値 $f(a)$ とは無関係であることに注意しよう．中間試験等では， ε - δ 論法を使っての解答を期待します．

$y = f(x)$ の微分を表す記号の一つに $\frac{dy}{dx}$ があります．これは^{ライプニッツ}Leibniz¹⁾が導入した記号で，以来 300 年間ずっと使われてきました．独立変数 x が微小量 dx だけ増加したときとすると，従属変数 y もそれに応じて dy だけ変化しますが²⁾，多くの場合 dx と dy の比は有限の値になります³⁾．たとえば $f(x) = x^2$ のときは

$$f(x + dx) = x^2 + 2x dx + dx^2$$

なので $dy = 2x dx + dx^2$ となり

$$\frac{dy}{dx} = 2x + dx = 2x$$

という具合です．最後の等号は dx は x に比べて非常に小さいので dx を 0 と思う事によります．このように，微分積分学の黎明期には， dx と dy には微小変化量という確固とした意味があったのです．もちろん，現代数学の立場では厳密性に欠けるためこのような議論は認められず， $\frac{dy}{dx}$ には形式的な意味しか与えられていませんが，当時の記号が今でも生きているのです．

¹⁾ Leibniz (1646–1716): 17 世紀に活躍したドイツの哲学者・数学者・政治家．数学では，微分積分法の発見 (Newton とは独立) で有名．現在使われている微分や積分の記号などの多くは彼の発明であるものが多い．

²⁾ というよりも，変化した量 $f(x + dx) - f(x)$ を dy と表す．

³⁾ 多項式関数や三角関数，指数関数などの初等関数ではもちろん成り立つ．ただし， $y = \sqrt{1 - x^2}$ における $x = 1$ などのように，常に成り立つわけではない．

前回の小テストの解答例．

関数 $\sqrt{k+x}$ が単調増加であることより， $\{a_n\}$ が単調増加になることは明らか． λ を方程式 $x = \sqrt{k+x}$ の解とする．すなわち， $\lambda = (1 + \sqrt{4k+1})/2$ である．このとき任意の自然数 n に対して $a_n \leq \lambda$ となる．実際，

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} \leq \sqrt{k + \lambda} = \lambda$$

である．以上より数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束し，方程式 $x = \sqrt{k+x}$ の解 (で $1 \leq x \leq \lambda$ の範囲にあるもの) がその極限值になる．すなわち， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda = (1 + \sqrt{4k+1})/2$ ．

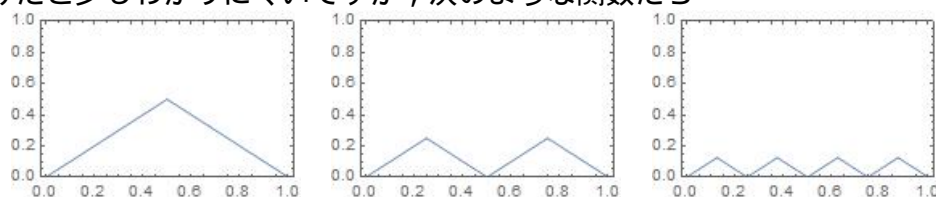
問題

区間 $[0, 1]$ 上で連続であるが、その区間上のいかなる点においても微分ができないような関数を構成せよ。

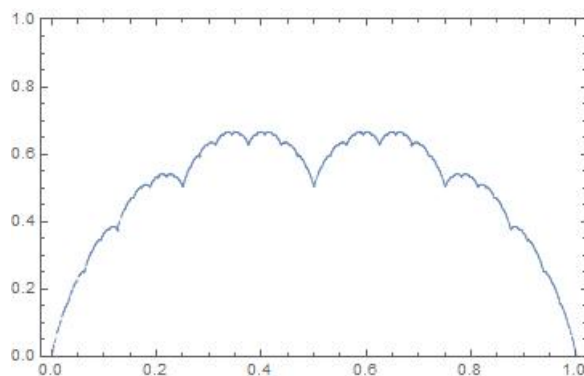
一見、そんな関数はなさそうに思えますが、実はそのような関数は存在します。

$$T(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s(2^n x)}{2^n} \quad (x \in [0, 1]; s(\alpha) = \min_{n \in \mathbb{N}} |n - \alpha|).$$

式だけだと少しわかりにくいですが、次のような関数たち



を次々に足していって関数を構成するのです¹⁾。特に $x = m/2^k$ (m, k は整数) の点は微分できないことがわかります。 $x = m/2^k$ という形の点が区間 $[0, 1]$ に稠密に存在することからいたるところで微分できないということになるわけです。因みにこの関数のグラフは次のような形になります²⁾。



この関数は高木関数という名前が付いていて、前にコラムで紹介した近世数学史談の著者である高木貞治氏によって発見されました。驚くべきことに、連続関数の中において、このような関数が大多数を占めているのです。つまり、我々が普段扱っている関数は、連続関数の中では非常に特殊なものを扱っていることになります。

¹⁾ 無限級数で定義されているので、収束することや連続性を確認しなければなりません。

²⁾ このような図形をフラクタルと呼びます。

Taylor 級数の名は 18 世紀初頭のイギリスの数学者^{ブルック} Brook Taylor に由来します。これは無限級数で表されていますが、無限級数は扱いが難しく、注意が必要です。その例を一つ紹介します：

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \cdots \quad (1)$$

ですが、この両辺を 2 で割ると

$$\frac{1}{2} \log 2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots$$

で、この二つを加えると、

$$\frac{3}{2} \log 2 = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots \quad (2)$$

となります。式 (2) の右辺は、式 (1) の右辺と同じ項から成り、正の項を二つとってから負の項を一つとる、というように足す順番を変えたものです。しかし、その総和の結果はそれぞれ $\log 2$ と $\frac{3}{2} \log 2$ なので、異なっています。このように、無限個のものを足すときには、有限個のときと同じように勝手に順序を変えたり、括弧で括ったりするのは危険です。これができるためには、級数の収束性にある種の条件が必要です¹⁾。さて、無限級数が出てきたので、面白い等式を紹介します。

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \cdots &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{12} \\ 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \cdots &\stackrel{!}{=} 0 \\ 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + 6^3 + \cdots &\stackrel{!}{=} -\frac{1}{120} \end{aligned}$$

ここで $\stackrel{!}{=}$ と書いたのは、通常の意味では $=$ にならないからですが、多くの数学者を魅了してやまないゼータ関数を経由することで、その意味を理解できます。

¹⁾ この例の記述は「微分積分教科書」（斎藤正彦著，東京図書）の 3 ページからとった。

Taylor 多項式は、なめらかな関数がある点の近傍において多項式で近似するというものです。特にその点に近いときは（たとえば差が 1 未満のとき）、誤差の限界も求めることもできるので、十分に良い精度で近似できます。高木貞治著「解析概論」の 25 節（第 2 章）の最後に、その計算例として自然対数の底 e の少数第 6 位までの計算例が載っています。また、Taylor 級数展開はなめらかな関数を無限次の多項式として記述するものであり、線形代数の言葉でいうと、 $1, x, x^2, x^3, \dots$ という基底に関して関数を表したものであると見なすことができます。しかし、Taylor 展開は無限級数なので、一般には収束するために条件が必要です。例えば $\log(1+x)$ は $|x| < 1$ でなければなりません。したがって、その範囲を超えた場所にある値の近似値を計算する際には工夫が必要です。log の場合は、教科書 p.60 にある問題 4.73 (1) を用いることにより、 $\log(1+x)$ ($x > 1$) の近似値を計算できます。

L'Hôpital の定理について: L'Hôpital の定理は、 $f(x) \rightarrow 0, g(x) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow a$) のときに $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ が成り立つというものです。これは無条件に成り立つものではなく、 $g'(x) \neq 0$ という条件が必要です。そのことについて教科書に詳しく書いてありますので、ぜひ読んでおきましょう。試験等で用いてよいですが、Taylor 多項式を利用するほうが速いことも多いです。残念ながら講義中で解説する時間はなさそうなので、コラムにて紹介しました。

来週は中間試験です。

場所：1302 教室

試験範囲：数列・関数の極限，1 変数関数の微分（逆三角関数・高階微分・Taylor 展開）

中間試験の結果

	1	2	3	4	5	6	総合
平均点	8.3	12	11	14	4.4	8.9	58.6

非常に甘く採点しています。大問 1,2 は講義で扱った内容ですし、大問 4-6 と (ほぼ) 同様の問題が配布した演習問題にあります。いくら範囲が広がったとはいえ、ちゃんと準備していれば手も足も出ないということはなかったはず。

大問 1— ε - N 論法による極限の扱いは微分積分学の基本ですので、しっかりと復習しておいてください。

大問 2— 連続性の定義はしっかりと抑えておいてください。この関数は、導関数が不連続になる関数ということで何度も講義に出てきたはず。

大問 3— $\tan x$ の加法定理を使いこなせていない学生が意外と多かったです。これは高校の内容ですので、講義で補足はしません。各自復習を。

大問 4— 6 月 6 日分の小テストの類題です。Landau の記号 $o(g(x))$ は扱いが少し難しいですが、慣れると便利ですので是非使いこなせるようになりましょう。

大問 5— Taylor 展開を利用して極限を求める問題です。 $\sec x$ が出てきますが、大問 4 の結果を使わずとも計算自体は可能です。

大問 6— Leibniz の公式を使えばよいだけなのでサービス問題のつもりでしたが、公式を使わずに解こうとした学生が殆どで驚きました。

レポートについて。

中間試験の問題を全問解き直して 7 月 4 日 (火) までに提出してください。締切厳守です。ただし、中間試験の点数が 70 点以上の方は任意とします。

レポートの書き方についての注意事項

1. 学籍番号および氏名を忘れずに書くこと。
2. レポート用紙は自由です。市販のレポート用紙でなくても、普段使っているルーズリーフでもよいです。ただし、ばらばらにならないようにステープラー等で綴じるようにしてください。
3. レポートは、試験と違ってノート・教科書なども参考にして構いませんが、丸写しは不可です。何をしているのか、なぜそのようにするのかをわかるように、根拠を明確にして書いてください。
4. 丁寧に書くよう心掛けてください。時々、解読に時間が掛かるものがあったりします。レポートはあくまでも他人に見てもらうものですので、最低限読めるように書いてください。
5. 用紙を使い惜しまないようにしてください。一頁にむりやり詰め込んで書いてしまうと、どの問題について記述しているのかを判別することが難しくなります。

正弦関数の逆関数は，その微分からもわかるように，

$$y = \operatorname{Arcsin} x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

と積分を使って表すことができます．その逆関数，すなわち上式において x を y の関数と見做せば，それはもちろん正弦関数 $x = \sin y$ になります¹⁾．では，この被積分関数を少しだけ変形した

$$y = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

で同様のことを考えるとどうなるでしょうか．実は，この問題が，19 世紀初頭から Gauss, Abel, Jacobi, Weierstrass といった数学界の巨人たちがこぞって研究した楕円関数論に発展していくのです．この楕円関数は複素数を変数とする関数として考えるのが自然で，したがってこの講義の範疇にはとても収まりません．しかし，例えば教科書 p.103 にもあるように算術幾何平均と密接に関わっているなど²⁾，面白い性質をたくさん持っています．本コラムでは度々紹介していますが，参考文献 [1] では，この楕円関数を中心として 19 世紀の数学者たちのドラマが展開されています．

参考文献．

[1] 高木貞治，近世数学史談，岩波書店．

¹⁾ つまり，不定積分で定義される関数の逆関数が非常に良い性質を持っている，ということです．
 $\log x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ の逆関数である $x = e^y$ も同様の例を与えています．

²⁾ 積分の見た目が大分異なりますが，本質的には同じものです．

問題

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ がそれぞれ α, β に収束するとき, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ を示せ.

証明. $\varepsilon > 0$ を任意にとる. まず, 数列 $\{a_n\}$ は収束するので特に有界であることより, ある正数 $M > 0$ を用いて $|a_n| < M$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) とできる. また, $\{a_n\}, \{b_n\}$ はそれぞれ α, β に収束するので, $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M+|\beta|} > 0$ という正数に対してある番号 N_1 があり, $n \geq N_1$ ならば

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon_1, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon_1$$

とできる. よって, $n \geq N_1$ のとき

$$\begin{aligned} |a_n b_n - \alpha\beta| &= |a_n b_n - a_n \beta + a_n \beta - \alpha\beta| \\ &\leq |a_n| \cdot |b_n - \beta| + |a_n - \alpha| \cdot |\beta| \\ &\leq M \cdot \varepsilon_1 + \varepsilon_1 \cdot \beta = \varepsilon. \end{aligned}$$

これより, 任意の正数 ε に対して番号 N_1 を上記のように取れば, $n \geq N_1$ なる自然数に対して常に $|a_n b_n - \alpha\beta| < \varepsilon$ が成り立つので, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n b_n = \alpha\beta$ である. \square

コメント

- 収束することを示すには, まず正数 ε を与えることから始めなくてはなりません. それは, 「収束すること」の定義が「与えられた正数 ε に対して番号 N が見つかり…」となっているからです. 定義をしっかりと押さえましょう.
- 証明は上記のように書くのですが, 実際に証明をしていくときには, まず $|a_n b_n - \alpha\beta| = \dots$ の計算から始めます. そして, これを ε という任意の正数で上から抑えるために何が必要なのかを考えます. この問題の場合は数列 $\{a_n\}$ を上から抑える正数 M や $\{a_n\}, \{b_n\}$ の収束に関する N_1 などです. これらを合わせて, 最後に, 実際に証明を書き始めるのです. 必要となる情報は問題毎に異なりますので, 証明を書き始める前に準備が必要なのです.

期末試験について .

期末試験の日程・場所は教務課による掲示を各自確認してください .

形式は中間試験と同様 . 出題範囲は前期扱った内容すべてですが , 中間以降の内容に重点を置きます . 講義や小テスト , 演習問題にある問題から多く出題する予定です . 講義で紹介した部分分数分解や三角関数 , 双曲線に関する積分は必ずできるようになっておいてください .

範囲 : 中間試験の範囲 (数列の極限 , 高階微分 , Taylor 級数展開 , 逆三角関数) ,
積分計算 (部分分数分解 , 三角関数 , 双曲線関数に関する積分) ,
広義積分 (広義積分の計算 , 収束・発散の判定)

(おそらく) 有名な広義積分の値を以下に羅列する．その中には講義の知識だけでは導出できないものも含まれており，それらは後期に扱う多変数関数の積分か，或いは複素関数論の技法を用いる必要がある．

$$(1) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}(b-a) \quad (a, b > 0)$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{ax^4 + bx^2 + c} = \frac{\pi}{2\sqrt{c}\sqrt{b+2\sqrt{ac}}} \quad (a, b, c > 0)$$

$$(4) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}} = \pi \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^n \cdot n!}$$

$$(5) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^4)^{n+1}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3 \cdot 7 \cdots (4n-1)}{4^n \cdot n!}$$

$$(6) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \quad (0 < \alpha < 1)$$

$$(7) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}} dx = \frac{1}{2}$$

$$(8) \int_0^{+\infty} e^{-(x-\frac{a}{x})^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$(9) \int_0^1 \frac{\log x}{1-x} dx = -\frac{\pi^2}{6}, \quad \int_0^1 \frac{\log x}{1+x} dx = -\frac{\pi^2}{12}$$

$$(10) \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \log x}{x^2-1} dx = \frac{\pi^2}{2(1+\cos \alpha\pi)} \quad (0 \leq \alpha < 1)$$

$$(11) \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{1+x^4} dx = -\frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \log x}{1+x^4} dx = \frac{\pi^2}{8\sqrt{2}}$$

$$(12) \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}$$

(1) は教科書にも書いてある．(2)～(9) は解析概論 (高木貞治著) から，(10) 以降は複素関数論講義 (野村隆昭著) から．実数の範囲での積分計算であっても，複素数を用いて計算することが有効である場合が多い．