

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 1

1. 次の集合に属する元を具体的にすべて表せ．

- (1)  $X_1 = \{n \in \mathbb{Z}; |n| < 5\}$  (2)  $X_2 = \{m \in \mathbb{N}; m \text{ は } 50 \text{ 以下の素数}\}$   
(3)  $X_3 = \{x \in \mathbb{Q}; x = p/q \text{ (} p, q \text{ は互いに素) とするとき } 0 < p < q < 5 \text{ となるもの}\}$

2. 次の多項式の集合の元を，具体的に表せ<sup>\*1</sup>．

- (1)  $X_1 = \{2 \text{ 次以下の実数係数の多項式全体}\}$   
(2)  $X_2 = \{2 \text{ 次以下の実数係数の多項式で，係数の和が } 0 \text{ となるもの全体}\}$   
(3)  $X_3 = \{3 \text{ 次以下の実数係数多項式で，微分したら多項式 } x^2 + x \text{ になるもの全体}\}$

3. 次の三角不等式が成り立つことを証明せよ．

$$(1) |a + b| \leq |a| + |b| \quad (2) ||a| - |b|| \leq |a - b| \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

4. 二項係数が  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$  を満たすことを用いて，次の等式を証明せよ．

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{j-1} + \binom{n}{j}.$$

5. 二項係数に関して，次の等式を証明せよ．

$$(1) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad (2) \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

6<sup>†</sup> (1) 数列  $\{a_n\}$  がある実数  $\alpha$  に収束することを  $\varepsilon$ - $N$  論法の言葉で表せ．

(2) 数列  $\{a_n\}$  がある実数  $\alpha$  に収束しないことを  $\varepsilon$ - $N$  論法の言葉で表せ．

7<sup>†</sup> 次の極限を， $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて証明せよ．

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^3} = 0 \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0 \quad (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1$$

8.  $\alpha$  を非負の数とし，任意の正の数  $\varepsilon$  に対して  $\alpha < \varepsilon$  を満たすとする．このとき  $\alpha = 0$  となることを示せ．

---

4 月 11 日分 (凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup> 問題が少し曖昧であるが，たとえば (1) なら実数  $a, b, c$  を用いて  $ax^2 + bx + c$  と表せる，など．

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 2

- 1.† 数列  $\{a_n\}$  が 0 以外の数  $\alpha$  に収束しているとする。このとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\alpha}$  を示せ。
- 2.†  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  を  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて示せ。
3. 次の極限を求めよ。

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n-1}{2n+5} \\ (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n & (4) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2 - n - 1} \\ (5) \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) & (6) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10n}{2^n} \end{array}$$

4. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} \quad (a > 0) \quad (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n} \quad (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot a^n \quad (|a| < 1)$$

- 5.†  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \alpha < +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \beta < +\infty$  とするとき、次の極限を示せ。

$$\begin{array}{ll} (1) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n} = \alpha \\ (2) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1}{n} = \alpha\beta \\ (3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n}{n^2} = \frac{\alpha}{2} \quad (\text{問題 2.7}) \end{array}$$

- 6.†  $\sqrt[3]{3}$  が無理数であることを、極限を利用することにより示せ\*1。

7. 教科書 p.16 の問題 2.15 を解け。

8.  $0 < a \leq b \leq c$  のとき、次の極限を求めよ (問題 2.19)。

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n}.$$

9.  $a > 0$  のとき、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  を示せ (問題 2.24)。

---

4 月 18 日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*1 教科書の例 2.21 も参照のこと。

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 3

1.<sup>†</sup>  $\varepsilon$ - $\delta$  論法により次が成り立つことを示せ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} x^3 = 8 \quad (2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x) = 6 \quad (3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$$

2. 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 6x^2 + x^3}{2 - 5x^3}$$

3. 次の極限值を求めよ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x - 3} - x + 1) \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

4.<sup>†</sup> 次の関数は区間  $[0, 1]$  で連続となるか. なるのならばそれを  $\varepsilon$ - $\delta$  論法で示し, ならなければその理由を述べよ.

$$(1) f(x) = \left| x - \frac{1}{2} \right| \quad (2) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(2x-1)^2} & (x \neq \frac{1}{2}) \\ 0 & (x = \frac{1}{2}) \end{cases}$$
$$(3) f(x) = \begin{cases} \frac{16x^2-9}{4x-3} & (x \neq \frac{3}{4}) \\ 6 & (x = \frac{3}{4}) \end{cases} \quad (4) f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

5. 次の関数は区間  $(0, 1)$  で有界かどうか調べよ.

$$(1) \frac{1}{x^2} \quad (2) \sin \frac{1}{x} \quad (3) \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} \quad (4) \frac{(1-x) \sin x}{x(1-x^2)}$$

6. 次の右極限, もしくは左極限を求めよ<sup>\*1</sup>.

$$(1) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} \quad (4) \lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$$

7. 各自然数  $n$  に対して  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  を  $\varepsilon$ - $\delta$  論法を用いて証明し, よって任意の多項式  $p(x)$  に対して  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  が成り立つことを示せ.

8.\* 関数  $f(x)$  が点  $x = a$  において連続でないことを  $\varepsilon, \delta$  を用いて表現せよ.

---

4月25日分 (凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup>  $\lim_{x \rightarrow a+0}$  において,  $a = 0$  のときは単に  $\lim_{x \rightarrow +0}$  と表す.

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 4

1. 数列  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$  を次の漸化式によって定める．このとき以下の設問に答えよ．

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{\sqrt{a_n^2 + 1} - 1}{a_n}.$$

- (1)<sup>†</sup>  $\{a_n\}$  は単調減少となることを示し，0 に収束することを示せ．  
(2)\* 数列  $\{2^{n+1}a_n\}$  も単調減少し，0 でない実数に収束することを示せ．  
(3)\* (2) の数列の極限値を予測せよ\*<sup>1</sup>．なぜその数に収束するか，理由を考えよ．  
2. 次の漸化式が収束することを示し，その極限を求めよ\*<sup>2</sup>．

$$(1) \quad a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n} \qquad (2) \quad a_1 = 2, \quad a_{n+1} = a_n + \frac{1}{(n+1)!}$$

$$(3)^{\dagger} \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{1}{a_n + 1} \qquad (4)^{\dagger} \quad a_1 = 1, \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n}$$

3.  $a_1 > 0, A > 0, a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{A}{a_n} \right)$  のとき， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  を求めよ\*<sup>3</sup>．

4. 次の集合の上限を求めよ\*<sup>4</sup>．

$$\begin{aligned} (1) \quad S_1 &= \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} & (2) \quad S_2 &= \left\{ 1 - \frac{1}{n}; n \in \mathbb{N} \right\} \\ (3) \quad S_3 &= \left\{ 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}; n \in \mathbb{N} \right\} & (4) \quad S_4 &= \{ \log x; x > 0 \} \\ (5) \quad S_5 &= \{ 1 - x^x; 0 < x < 1 \} & (6) \quad S_6 &= \left\{ \frac{e^x + e^{-x}}{2}; -1 < x < 1 \right\} \end{aligned}$$

- 5.<sup>†</sup> 「連続関数は有界閉区間上で最大値および最小値をとる」という定理において，  
(i) 区間が有界であること，  
(ii) 閉区間であること，  
(iii) 関数が連続であること，  
はすべて必要である．これらのうち一つが成り立たないとして，定理が成立しないような関数  $f(x)$  をそれぞれ構成せよ\*<sup>5</sup>．  
6.\* 上記の問題 5 において，有界閉集合の場合は教科書の (有界閉集合に対する) 証明がなぜうまくいかないのか，その理由を答えよ．

5月9日分 (凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*<sup>1</sup> 必要ならば計算機を用いてもよい．

\*<sup>2</sup> ヒント：(3) と (4) は偶数の部分列  $\{a_{2k}\}$  と奇数の部分列  $\{a_{2k+1}\}$  に分けて考える．

\*<sup>3</sup> ヒント：先に極限値を推測して， $\varepsilon$ - $\delta$  論法に持ち込む．

\*<sup>4</sup> (3) の級数はパーゼルの問題として有名．1735 年に Euler によって初めて求められた．

\*<sup>5</sup> たとえば (i), (ii) は成立するが (iii) は成立しない場合など．3 パターンある．

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 5

- 1.†  $f(x) = x^\alpha$  ( $\alpha$  は任意の実数) とするとき,  $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$  が成立することを示せ\*<sup>1</sup>.  
2. 次の関数の導関数を求めよ.  $m, n$  は任意の自然数とし,  $p, q$  は任意の実数とする.

$$(1) (1+x)^m(2-x)^n \quad (2) e^{px}(\cos qx + \sin qx) \quad (3) (\sin px)^m(\cos qx)^n$$

3. 次の関数の導関数を求めよ.

$$(1) x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}} \quad (2) \sqrt[3]{1-x^2+3x^4} \quad (3) \frac{\sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

- 4.† 次の関数の  $x=0$  における微分係数を求め, 原点で微分可能かどうかを判定せよ.

$$(1) y = |x| \quad (2) y = x^{1/3} \quad (3) y = \sqrt{x^2 + x^4} \quad (4) y = \begin{cases} x \operatorname{Arctan}(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

5. 対数微分法により次の関数を微分せよ.

$$(1) \frac{(x+1)^2}{(x+2)^3(x+3)^4} \quad (2) \sqrt{\frac{(a+x)(b+x)}{(a-x)(b-x)}} \quad (3) e^{\sqrt{x}} \quad (4) x^x$$

- 6.† 次の関数は  $x=0$  で連続であるが, 微分係数を持たないことを示せ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases} \quad (2) f(x) = \begin{cases} x \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

7. 次の関数の逆関数を求めよ. ただし  $ad - bc = 1$  とする.

$$(1) \frac{ax+b}{cx+d} \quad (2) \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (3) \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

8. 次の逆三角関数の値を求めよ.

$$(1) \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} \quad (2) \operatorname{Arctan} \sqrt{3} \quad (3) \operatorname{Arctan}(2 + \sqrt{3})$$

9. 逆三角関数に関して, 次の恒等式が成り立つことを示せ. ただし  $a > b > 0$  とする.

$$(1) \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \quad (2) \operatorname{Arctan} \frac{b}{a} + \operatorname{Arctan} \frac{a-b}{a+b} = \frac{\pi}{4}$$

---

5月16日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*<sup>1</sup> 対数微分法を用いる.

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 6

1. 次の関数の極値を求めよ．

$$(1) x^3 - x + 1 \quad (2) (x-1)^2(x-2)^2 \quad (3) \frac{x+1}{x^2+1} \quad (4) \frac{x^2-x+2}{x^2+x+2}$$

2.<sup>†</sup> 次の関数の極値を求めよ．

$$(1) x - 2 \sin x \quad (2) 3 \sin x + \sin 3x \quad (3) xe^{-x} \quad (4) \cosh x + \cos x$$

3.<sup>†</sup>  $y = x^{1/x}$  の極値を求め、その結果を使って、 $e^\pi$  と  $\pi^e$  のどちらが大きいかを判定せよ．

4. 関数  $y = x + a + \frac{b}{x}$  の極大値が 0 になるための条件を求め、そのときのグラフを描け．

5. 2つの関数  $f(x), g(x)$  が、ある区間において  $f'(x)g(x) = f(x)g'(x)$  を満たすならば、 $f(x) = cg(x)$  ( $c$  は定数) となることを示せ．ただし、 $f, g$  の少なくとも一方は零関数でないとする．

6.<sup>†</sup> Cauchy の平均値の定理を証明せよ．すなわち、閉区間  $I = [a, b]$  で連続で、开区間  $I^\circ = (a, b)$  で微分可能な関数  $f(x), g(x)$  で、 $g'(x) \neq 0$  ならば、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

となる  $c \in I^\circ$  が存在することを示せ<sup>\*1</sup>．

7.<sup>†</sup> 双曲線関数に関する次の等式を示せ<sup>\*2</sup>．

$$(1) \cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y,$$

$$(2) \sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y,$$

$$(3) \sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 + 1}), \quad \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1}),$$

$$(4) \tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x},$$

$$(5) (\sinh x)' = \cosh x, \quad (\cosh x)' = \sinh x, \quad (\tanh x)' = (\cosh x)^{-2}.$$

8. 教科書の問題 4.28 を解け．

9. 教科書の問題 4.29 を解け．

10.\*  $f(x) = x^3$  とするとき、 $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$  なる等式中の  $\theta \in (0, 1)$  は  $a + h/3 = 2a\theta + \theta^2 h$  を満足することを示し、それにより  $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$  を求めよ<sup>\*3</sup>．

---

5月23日分 (凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*1 ヒント:  $F(x) := \lambda f(x) + \mu g(x)$  とおいて  $F(a) = F(b)$  となる  $\lambda, \mu$  を見つけ、Rolle の定理を適用する．

\*2  $\sinh^{-1} x$  は  $\sinh x$  の逆関数．他も同様．一方で  $(\cosh x)^{-2}$  は  $\frac{1}{\cosh^2 x}$  のこと．

\*3  $a = 0$  かどうかで場合分けが必要．

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 7

1. 次の関数の第 4 階導関数を計算せよ .

$$(1) \frac{x^3}{1-x} \quad (2) \frac{1}{\cos x} \quad (3) \operatorname{Arctan} x \quad (4) \operatorname{Arcsin} x$$

2.<sup>†</sup> 次の関数の  $n$  階導関数を計算せよ .

$$(1) \frac{x}{x^2-1} \quad (2) \frac{x^4}{1-x} \quad (3) x \log x \quad (4) \sin^3 x \quad (5) e^x \sin x$$

3. 次の関数の  $n$  階導関数を計算せよ .

$$(1) x^{n-1} \log x \quad (2) x^{n-1} e^{1/x} \quad (3) (1-x^2)^n$$

4.<sup>†</sup> 次の関数の  $n$  階導関数を計算せよ . ただし ,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  は任意の実数で ,  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  は  $ad - bc \neq 0$  をみたす実数とする .

$$(1) \cos \alpha x \sin \beta x \quad (2) x^2 \sin \alpha x \quad (3) \frac{ax+b}{cx+d} \quad (4) \frac{1}{(ax+b)(cx+d)}$$

5.<sup>†</sup>  $C^2$  級の関数  $f$  が点  $x = a$  で  $f'(a) = 0$  を満たすとする . このとき ,  $f''(a) > 0$  ならば  $f(a)$  は極小値 ,  $f''(a) < 0$  ならば  $f(a)$  は極大値となることを示せ .

6. 自然数  $k$  に対して  $f_k(x)$  を ,  $f_k(x) = x^{2k} \sin \frac{1}{x}$  ( $x \neq 0$ ) ,  $f_k(0) = 0$  により定義する .

(1)  $f_2(x)$  は 2 階微分可能であるが ,  $C^2$ -級関数でないことを示せ .

(2)\*  $f_k(x)$  は  $k$  階微分可能であるが ,  $C^k$ -級関数でないことを示せ .

7.<sup>†</sup> 次の関数の  $x = 0$  の近くにおける 3 次の Taylor 多項式を求めよ .

$$(1) \frac{1}{\cos x} \quad (2) \frac{e^x}{\cos x} \quad (3) \operatorname{Arctan} x \quad (4) e^x \sin x \quad (5) x \log(1+x)$$

8. 一般二項係数  $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$  について , 次の等式を示せ .

$$(1) \text{ 自然数 } n \text{ に対して , } \binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{n-1} \quad (2) \binom{-1}{k} = (-1)^k$$

$$(3) \binom{-1/2}{k+1} = (-1)^{k+1} \frac{(2k+1)!}{2^{2k+1}(k+1)(k!)^2}$$

---

5 月 30 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題 , \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 8

1. 次の関数の  $x = 0$  における Taylor 多項式を，最初の 3 項目まで求めよ<sup>\*1</sup>．

$$(1) \frac{x}{e^x - 1} \quad (2) \sqrt{1+x} \quad (3) (1+x)^x \quad (4) \sqrt[3]{1+x^2}$$

- 2.<sup>†</sup> 次の関数の  $x = 0$  における Taylor 多項式を，最初の 3 項目まで求めよ．

$$(1) \sec x = \frac{1}{\cos x} \quad (2) \frac{x}{\sin x} \quad (3) \frac{x^2}{1 - \cos x} \quad (4) \sin^2 x$$
$$(5) \cos^2 x \quad (6) \frac{1}{\tan x} \quad (7) \operatorname{Arcsin} x \quad (8) \sqrt{1 + \sin x}$$

3. 次の関数の  $x = 0$  における 5 次の Taylor 多項式を求めよ．

$$(1) 2 \sin x + \tan x - 3x \quad (2) \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$$

4.  $\tan x$  の  $x = 0$  における Taylor 多項式を 9 次の項まで計算せよ．

- 5.<sup>†</sup> 次の極限を求めよ．

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x)^{\sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^3}$$
$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Arcsin} x + \sin x - 2x}{x^2(x - \operatorname{Arctan} x)} \quad (5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sec x - 2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x}{(\sin x - x) \log(1 + 2x)}$$

- 6.\* 次の極限を求めよ<sup>\*2</sup>．

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin(1/x)}{\sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x^2 \sin(2 \log x) + x^2 \cos(2 \log x)}{x \sin(\log x)}$$

- 7.\* 適当な計算道具を用いて， $x$  が十分小さいときに成立する次の近似式  $(1+x)^\alpha \asymp 1 - \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$  を用いて，次の値の近似値を求めよ．

$$(1) \sqrt[5]{30} \quad (\text{少数第 3 位まで}) \quad (2) \sqrt[3]{130} \quad (\text{少数第 6 位まで})$$
$$(3) \sqrt[5]{240} \quad (\text{少数第 5 位まで})$$

- 8.\* 適当な計算道具を用いて，次の値の少数第 4 位までの近似値を求めよ．

$$(1) \sin \frac{1}{2} \quad (2) \cos \frac{1}{2} \quad (3) \tan \frac{1}{2} \quad (4) \sqrt{e}$$

---

6 月 6 日分 (凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup> たとえば  $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$  など．

<sup>\*2</sup> L'Hôpital の定理を適用できない例．また，(2) においては  $\sin x$ ,  $\cos x$  の Taylor 多項式による近似もできないことに注意 ( $x \rightarrow +0$  のとき  $\log x \rightarrow -\infty$  なので)．



# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 9

- 1.<sup>†</sup> 数列  $\{a_n\}, \{b_n\}$  がそれぞれ実数  $\alpha, \beta$  に収束するとき,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$  を  $\varepsilon$ - $N$  論法を用いて示せ .
2. 次の命題の真偽を調べ, 正しい場合は証明を, 誤っていれば反例を挙げよ .
- (1)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x + y = 0$   
(2)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } x + y = 0$   
(3)  $\forall x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } xy = 1$   
(4)  $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} \text{ s.t. } xy = 0$
- 3.<sup>†</sup> 区間  $I = [-1, 1]$  上の関数  $f(x)$  を,  $f(x) = x^4 \sin(1/x)$  ( $x \neq 0$ ),  $f(0) = 0$  により定義する . このとき,  $f$  は  $C^1$  級の関数であるが  $C^2$  級の関数ではないことを示せ .
4. 次の関数の Taylor 級数展開を最初の 3 項目まで求めよ .

$$(1) \cosh x \quad (2) \sinh x \quad (3) \frac{1}{1+x^2} \quad (4) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

5. 次の関数の  $n$  次導関数を計算せよ . ただし,  $\alpha$  は実数の定数である .

$$(1) x^2 \sinh \alpha x \quad (2) (x^2 - 1) \cos \alpha x \quad (3) e^{\alpha x} \sin \alpha x$$

6. 次の逆三角関数を用いた数を, 逆三角関数を用いずに表せ<sup>\*1</sup> .

$$(1) \operatorname{Arctan} 2 + \operatorname{Arctan} 3 \quad (2) \operatorname{Arcsin} \frac{1}{4} + \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{6}}{4} \\ (3) 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} \quad (4) 5 \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} + 2 \operatorname{Arctan} \frac{3}{79}$$

7. 区分求積法 (教科書 p.75 参照) を用いて, 次の定積分を計算せよ .

$$(1) \int_0^1 x \, dx \quad (2) \int_0^1 x^2 \, dx \quad (3) \int_0^1 x^m \, dx \quad (m \in \mathbb{N})$$

- 8.<sup>†</sup> 次の関数の原始関数を一つ求めよ .

$$(1) \cosh x \quad (2) \sinh x \quad (3) \frac{1}{1+x^2} \quad (4) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

---

6 月 20 日分 (凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup> (1) は注意が必要 .

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 10

1.<sup>†</sup>  $m, n \geq 1$  を任意の自然数とするととき，次の定積分を計算せよ<sup>\*1</sup>．

$$(1) \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx \, dx \quad (2) \int_0^{2\pi} \cos mx \sin nx \, dx \quad (3) \int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx \, dx$$

2. 次の不定積分を計算せよ (部分積分)．

$$(1) \int \operatorname{Arcsin} x \, dx \quad (2) \int \log x \, dx \quad (3) \int x \operatorname{Arctan} x \, dx$$

3. 次の不定積分を計算せよ．ただし， $a$  は正の実数である (置換積分)．

$$(1) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (2) \int \frac{dx}{x^2 - 2ax + a^2 + 1} \quad (3) \int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx$$

4. 次の不定積分を計算せよ<sup>\*2</sup>．

$$(1) \int \frac{dx}{1+x^2} \quad (2) \int \frac{dx}{(1+x^2)^2} \quad (3) \int \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

5.<sup>†</sup> 次の有理関数を部分分数分解せよ<sup>\*3</sup>．

$$(1) \frac{1}{x^2 - 1} \quad (2) \frac{1}{1 - x^3} \quad (3) \frac{x+1}{x(x^2+1)} \quad (4) \frac{x}{x^3 - 1} \quad (5) \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}$$

6.<sup>†</sup> 問題 5 の有理関数の不定積分を求めよ．

7.  $x^4 + 1 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$  であることを利用して，次の有理関数を部分分数分解せよ．

$$(1) \frac{1}{x^4 + 1} \quad (2) \frac{x^2}{x^4 + 1} \quad (3)^* \frac{x^3 + x}{x^4 + 1}$$

8.<sup>†</sup> 次の関数の原始関数を求めよ．ただし， $a$  は正の実数である．

$$(1) x^3 e^{ax} \quad (2) x^3 e^{-x^2} \quad (3) \frac{1}{e^x + 4e^{-x} + 5} \quad (4) \frac{x}{\sqrt{a^4 - x^4}} \\ (5) \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \quad (6) \frac{1}{(x^2 - 1)^2} \quad (7) x \log x \quad (8) (\operatorname{Arctan} x)^2$$

---

6 月 27 日分 (凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，<sup>\*</sup> は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup> 三角関数の和積の公式を用いる．また，場合分けも必要である．

<sup>\*2</sup> 教科書 p.96 を参照のこと．

<sup>\*3</sup> (5) はまず分子の多項式の次数を分母のものよりも小さくする．

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 11

1. 次の関数の原始関数を一つ求めよ.

$$(1) \frac{1}{(5+3\sin x)\cos x} \quad (2) \frac{2-\sin x}{2+\cos x} \quad (3) \frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2} \quad (a \neq 1)$$

2. 次の関数の原始関数を一つ求めよ.

$$(1) \frac{1}{1+\cos x} \quad (2) \frac{1}{2+\cos x} \quad (3) \frac{1}{1+2\cos x} \quad (4) \frac{1}{1-\cos x}$$

3. 次の関数の原始関数を一つ求めよ. ただし  $a, b$  は実数で  $ab \neq 0$  とする.

$$(1) \frac{1}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (2) \frac{\sin^2 x}{1+3\cos^2 x} \quad (3) \frac{1}{a+b\tan x} \quad (4) \frac{\sin^2 x}{3+\tan^2 x}$$

4. 次の広義積分を計算せよ.

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x(1+x^2)} \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2)} \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$$

5.<sup>†</sup> 部分積分を利用して, 次の不定積分を計算せよ. ただし  $a, b$  は実数で,  $a > 0$  とする.

$$I(a, b) := \int e^{-ax} \cos bx \, dx, \quad J(a, b) := \int e^{-ax} \sin bx \, dx$$

6.<sup>†</sup> 問題 5 を利用して, 次の広義積分を求めよ.

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos bx \, dx \quad (2) \int_0^{+\infty} e^{-ax} \sin bx \, dx$$

7.<sup>†</sup> 次の関数の原始関数を一つ求めよ.<sup>\*1</sup>

$$(1) \frac{1-x^2}{1+x^2} \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} \quad (2) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad (3) \frac{1}{x+\sqrt{x-1}} \quad (4) \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} \\ (5) \frac{1}{x\sqrt{x^2+x+1}} \quad (6) \frac{\cos^3 x}{\sin x} \quad (7) \sqrt{\sin x} \cos^3 x \quad (8) \frac{1}{(e^x + e^{-x})^4}$$

---

7月4日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup> ヒント: (1)  $t = x + \frac{1}{x}$  (2)  $t = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$  (3)  $t = \sqrt{x-1}$  (4) 分母の有理化 (5)  $t = \frac{1}{x}$  (6)  $t = \sin x$   
(7)  $t = \sqrt{\sin x}$  (8)  $t = e^x$

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 12

1. 次の広義積分は収束するか．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^5} \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{e^x}{\cosh 2x} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

2.<sup>†</sup> 次の広義積分が収束するような  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  を決定せよ．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^\alpha} \quad (2) \int_0^{+\infty} \frac{e^{\alpha x}}{(\cosh x)^\beta} dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x^\alpha}{\sqrt{1-x}^\beta} dx$$

3.<sup>†</sup> 次の広義積分の値を求めよ．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \quad (2) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} \quad (3) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

4. 次の定積分を計算せよ．ただし  $a, b$  は実数で  $ab \neq 0$  とする．

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{a \sin^2 x + b \cos^2 x} \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\cos^4 x + \sin^4 x} \quad (3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{(a \sin^2 x + b \cos^2 x)^2}$$

5. 次の広義積分の計算は正しいか調べよ．

$$(1) \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1 \quad (2)^{\dagger} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1-x^2} = 0 \quad (3)^{*} \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1} dx = 0$$

6.<sup>†</sup> 次の定積分，もしくは広義積分を計算せよ．ただし  $n$  は自然数である．

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx \quad (2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx \quad (3) \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (4) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n}$$

7. 次の広義積分が収束することを示せ．

$$(1) \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^2} dx \quad (2) \int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx \quad (3) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$$

$$8.^{*} \int_0^{+\infty} |\sin x| e^{-x} dx = \frac{e^\pi + 1}{2(e^\pi - 1)} \text{ を示せ.}$$

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 13

1.†  $I_n := \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) とおくとき，以下の問いに答えよ．

(1)  $I_n$  を部分積分することにより， $I_{n+1}$  を  $I_n$  を用いて表せ．

(2) (1) を利用して  $I_2, I_3, I_4$  を求めよ．

2.\* 正の実数  $p, q$  に対して  $I_{p,q} := \int x^p(ax+b)^q dx$  ( $a, b$  は正の実数) とおく．このとき，次の簡約公式が成り立つことを示せ\*1．

$$(p+q+1)I_{p,q} = qbI_{p,q-1} + x^{p+1}(ax+b)^q, \quad a(p+q+1)I_{p,q} = -pbI_{p-1,q} + x^p(ax+b)^{q-1}.$$

3. ベータ関数  $B(s, t)$  ( $s, t > 0$ ) に関する次の等式を示せ．

$$(1) \quad B(s, t) = B(t, s) \quad (2) \quad B(s+1, t) = \frac{s}{s+t} B(s, t)$$

$$(3) \quad B(s, t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin \theta)^{2s-1} (\cos \theta)^{2t-1} d\theta$$

4. 広義積分  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^\alpha dx$  をガンマ関数を用いて表せ．

5.\*  $I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$  を次の誘導に従って示せ． $S_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$  とおく．

(1)  $1 < \frac{S_{2k}}{S_{2k+1}} < \frac{S_{2k-1}}{S_{2k+1}} = \frac{2k+1}{2k}$  を確認し，よって  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{S_{2k}}{S_{2k+1}} = 1$  を示せ．

(2)  $S_{2k} S_{2k+1} = \frac{\pi}{4k+2}$  を示せ．よって (1) より  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt{k} S_{2k+1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$  である\*2．

(3)  $S_{2k+1} = \int_0^1 (1-x^2)^k dx$ ,  $S_{2k-2} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}$  を示せ\*3．

(4) 不等式  $1-x^2 < e^{-x^2} < \frac{1}{1+x^2}$  ( $x \neq 0$ ) が成立することを示せ．

(5) 不等式  $2\sqrt{k} \int_0^1 (1-x^2)^k dx < I < 2\sqrt{k} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^k}$  を示せ\*4．

以上より  $2\sqrt{k} S_{2k+1} < I < 2\sqrt{k} S_{2k-2}$  であり，はさみうちの定理より所要の結果  $I = \sqrt{\pi}$  を得る．

---

7月25日分 (凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，\* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*1 ヒント:  $x^p(ax+b)^q = ax^{p+1}(ax+b)^{q-1} + bx^p(ax+b)^{q-1}$  を用いて変形し，部分積分を行う．

\*2 この証明は解析概論 (高木貞治著) から取った． $\sqrt{S_{2k} S_{2k+1}} = S_{2k+1} \sqrt{\frac{S_{2k}}{S_{2k+1}}}$  と見る．

\*3  $S_n$  の積分において，前者は  $t = \cos x$ ，後者は  $t = \cos x / \sin x$  と変数変換する．

\*4 偶関数なので積分区間を  $[0, +\infty)$  として考える． $x^2 = ky^2$  となるように変数変換し，(4) の不等式を利用する．ここで被積分関数が正ならば， $\int_0^1 < \int_0^{+\infty}$  となることに注意．