

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 1

- (1)  $X_1 = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$   
(2)  $X_2 = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47\}$   
(3)  $X_3 = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}\}$
- (1)  $ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ )  
(2)  $ax^2 + bx - a - b$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ )  
(3)  $x^3/3 + x^2/2 + c$  ( $c \in \mathbb{R}$ )
- (右辺)<sup>2</sup> - (左辺)<sup>2</sup>  $\geq 0$  を確認すればよい. (1) (右辺)<sup>2</sup> - (左辺)<sup>2</sup> =  $2(|ab| - ab)$  であるが, 絶対値の定義より  $|ab| \geq ab$  が成り立つ. (2) (右辺)<sup>2</sup> - (左辺)<sup>2</sup> =  $2(|ab| - ab)$  なので, (1) と同じ.
- 左辺から式変形する.

$$(\text{右辺}) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j+1)!} + \frac{n!}{j!(n-j)!} = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \left( \frac{1}{n-j+1} + \frac{1}{j} \right).$$

ここで  $\frac{1}{n-j+1} + \frac{1}{j} = \frac{n+1}{j(n+1-j)}$  なので,

$$(\text{右辺}) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \cdot \frac{n+1}{j(n+1-j)} = \frac{(n+1)!}{j!(n+1-j)!} = \binom{n+1}{j} = (\text{左辺}).$$

- $(x+1)^n = \sum_{i=1}^n \binom{n}{i} x^i$  を利用する.  
(1) 上式において  $x = 1$  を代入する. (2) 上式において  $x = -1$  を代入する.
- <sup>†</sup> (1) 任意の正の数  $\varepsilon > 0$  に対してある自然数  $N$  が存在して,  $n \geq N$  を満たす任意の自然数  $n$  に対して  $|a_n - \alpha| < \varepsilon$  が成立する.  
(2) ある正の数  $\varepsilon > 0$  が存在して, どんな自然数  $N$  に対しても  $n \geq N$  かつ  $|a_n - \alpha| \geq \varepsilon$  となる自然数  $n$  が存在する.
- <sup>†</sup> 実数  $a$  に対して  $[a]$  を,  $a$  を超えない最大の整数とする. 任意の正数  $\varepsilon$  が与えられたとする.  
(1)  $N = [\sqrt[3]{3/\varepsilon}] + 1$  とすれば,  $n \geq N$  のとき,  $n^3 \geq N^3 \geq 3/\varepsilon$  であるので,  $3/n^3 < \varepsilon$  となる.  
(2)  $N = [-\log \varepsilon] + 1$  とすれば,  $n \geq N$  のとき  $e^{-n} \leq e^{-N} < \varepsilon$ .

(3)  $N = \lceil -\log \varepsilon / \log 2 \rceil + 1$  とすれば,  $n \geq N$  のとき  $1/2^n < 1/2^N < \varepsilon$  である. よって,  $|1 - (1 - 1/2^n)| = 1/2^n < \varepsilon$ .

8. 背理法を用いる: もし  $\alpha \neq 0$  とすれば  $\alpha$  は非負の数であることより  $\alpha > 0$  であるが, このとき  $\varepsilon = \alpha/2$  に対しては  $\alpha < \varepsilon$  が成立していない. これは任意の正の数  $\varepsilon$  に対して  $\alpha < \varepsilon$  を満たすことに矛盾する. よって  $\alpha = 0$  でなければならない.

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 2

1.† 詳しくは教科書 pp.15,16 を参照のこと .

考え方 . 使えるもの :  $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N \text{ s.t. } n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon_1$

$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|}$  であるが ,  $a_n \rightarrow \alpha$  よりある番号  $N_1$  があって ,  $n \geq N_1$  のとき  $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|}{2}$  , つまり  $|a_n| > \frac{|\alpha|}{2} (> 0)$  となる . よって

$$\left| \frac{1}{a_n} - \frac{1}{\alpha} \right| = \frac{|a_n - \alpha|}{|a_n||\alpha|} < \frac{2\varepsilon_1}{|\alpha|^2}$$

なので , 改めて  $|a_n - \alpha| < \frac{|\alpha|^2}{2} (n \geq N_2)$  を満たす  $N_2 (> N_1)$  をえらべばよい .

2.† 準備 :  $\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| < \varepsilon$  を式変形すると  $n \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$  なので ,  $N = \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1$  とすれば十分 .

証明 .  $\varepsilon$  を任意にとる . このとき  $N := \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \right] + 1$  ととれば ,  $n \geq N$  のとき

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$$

とできるので ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  である .

3. (1) 0 (2)  $\frac{3}{2}$  (3) 1 (4)  $\frac{1}{3}$  (5)  $\frac{1}{2}$  (6) 0

(1) および (5) は , いわゆる無理化をする .

(3) は  $(1 - \frac{1}{n^2})^n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot (1 - \frac{1}{n})^n \rightarrow e \cdot e^{-1} = 1$ .

4. (1) 1 (2) 1 (3) 0

(1)  $a = 1$  のときは明らか .  $a > 1$  のとき ,  $\sqrt[n]{a} = 1 + \lambda_n$  とおくと ,

$$a = (1 + \lambda_n)^n = 1 + n\lambda_n + \cdots (\text{正の数}) > n\lambda_n$$

なので  $0 < \lambda_n < \frac{a}{n}$  . はさみうちの定理より  $\lambda_n \rightarrow 0$  , すなわち  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$  .  $0 < a < 1$  のときは  $b = 1/a$  が  $\sqrt[n]{b} \rightarrow 1$  となることより ,  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$  .

(2)  $\sqrt[n]{n} = 1 + \lambda_n$  とおくと ,

$$n = (1 + \lambda_n)^n = 1 + n\lambda_n + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2 \cdots (\text{正の数}) > 1 + \frac{n(n-1)}{2}\lambda_n^2$$

なので  $0 < \lambda < \frac{2}{n}$  . あとは (1) と同様 .

(3)  $a = 0$  のときは明らか .  $b = \frac{1}{|a|} > 0$  とおき ,  $b = 1 + \lambda$  とおく .

$$b^n = (1 + \lambda)^n = 1 + n\lambda + \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2 + (\text{正の数}) > \frac{n(n-1)}{2}\lambda^2$$

なので ,  $0 < \frac{n}{b^n} = n|a|^n < \frac{2}{n-1} \frac{1}{\lambda^2} \rightarrow 0 \ (n \rightarrow \infty)$  .

5.<sup>†</sup> (1) 基本的には講義で扱った例題 2.8 と同様 .

(準備)  $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists N_1 \text{ s.t. } |a_n - \alpha| < \varepsilon_1$  . 例題 2.8 で使った変形と ,  $\sum_{k=1}^n k = n(n+1)/2 \leq n^2$  より ,

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n k a_n}{\sum_{k=1}^n k} - \alpha \right| \leq \left( \sum_{k=1}^n k \right)^{-1} \sum_{k=1}^n k |a_n - \alpha| \leq \frac{1}{n^2} \left( \sum_{k=1}^{N_1-1} k |a_n - \alpha| + \sum_{k=N_1}^n k |a_n - \alpha| \right) .$$

ここで , 一番目の総和は  $n$  に依存しないものなので  $M$  とおく .  $\frac{M}{n^2} \rightarrow 0$  なので , ある番号  $N_2$  から先の  $n$  に対しては  $\frac{M}{n^2} < \varepsilon_1$  とできる . これより

$$(\text{前式}) \leq \frac{M}{n^2} + \frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2} \varepsilon_1 < \varepsilon_1 + \varepsilon_1 = 2\varepsilon_1 .$$

証明 .  $\varepsilon$  が任意に与えられたとする . 以上の議論を踏まえて ,  $N_1$  を ,  $n \geq N_1$  ならば  $|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}$  を満たす自然数とし ,  $N_2$  を ,  $n \geq N_2$  ならば  $\sum_{k=1}^{N_1-1} k |a_n - \alpha| / n^2 < \frac{\varepsilon}{2}$  を満たす自然数とする . すると ,  $N = \max(N_1, N_2)$  とすれば ,  $n \geq N$  のとき

$$\left| \frac{\sum_{k=1}^n k a_n}{\sum_{k=1}^n k} - \alpha \right| < \varepsilon .$$

(2) 方針だけ . 仮定は  $\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists N_1 \text{ s.t. } |a_n - \alpha|, |b_n - \beta| < \varepsilon_1 \ (n \geq N_1)$  .

$$\left| \frac{a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1}{n} - \alpha \beta \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k b_{n-k+1} - \alpha \beta| .$$

ここで総和の区間を (i)  $k = 1, \dots, N_1 - 1$ , (ii)  $k = N_1, \dots, n - N_1 + 1$ , (iii)  $k = n - N_1 + 2, \dots, n$  にわけ . また ,  $M_a := \max(|a_1|, \dots, |a_{N_1}|, |\alpha| + 1)$ ,  $M_b := \max(|b_1|, \dots, |b_{N_1}|, |\beta| + 1)$  とおく .

(i) においては  $|b_k - \beta| < \varepsilon_1$  なので  $\sum < (N_1 - 1) M_b \varepsilon_1$  .

(ii) においては  $|a_k - \alpha|, |b_k - \beta| < \varepsilon_1$  なので命題 2.3 の三角不等式を用いると  $\sum < (M_a + M_b)(n - 2N_1 + 2)\varepsilon_1$  .

(iii) においては  $|a_k - \alpha| < \varepsilon_1$  なので  $\sum < (N_1 - 1) M_a \varepsilon_1$  .

以上より ,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |a_k b_{n-k+1} - \alpha \beta| \leq \frac{n - N_1 + 1}{n} (M_a + M_b) \varepsilon_1 < (M_a + M_b) \varepsilon_1$$

なので, 与えられた任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $k \geq N$  ならば  $|a_k - \alpha|, |b_k - \beta| < \frac{\varepsilon}{M_a + M_b}$  となる自然数  $N$  を選べばよい.

(3) 教科書の解答 (p.210) を参考のこと. ちなみに

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k (n - k + 1) = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n} - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k k + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{n}$$

であり, 例題 2.8 より一番目の総和は  $\alpha$  に収束および三番目の総和は 0 に収束し, また二番目の総和は本問題 (1) を用いると

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n a_k k = \frac{\sum_{k=1}^n k}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^n \frac{a_k k}{\sum_{k=1}^n k} \rightarrow \frac{\alpha}{2} \quad (n \rightarrow \infty)$$

となることから与えられた極限が  $\alpha - \frac{\alpha}{2} + 0 = \frac{\alpha}{2}$  になることが分かる.

6.†  $1 < \sqrt[3]{3} < 2$  より  $a_n := (\sqrt[3]{3} - 1)^n$  とすれば,  $a_n > 0$  であり, かつ  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  とある. 一方, 二項定理より, 各  $a_n$  は整数  $x_n, y_n, z_n$  を用いて

$$a_n = x_n + y_n \sqrt[3]{3} + z_n \sqrt[3]{9}$$

と表せる. ここで  $\sqrt[3]{3} = \frac{p}{q}$  ( $p, q$  は互いに素な整数) と表せると仮定する. このとき

$$a_n = \frac{x_n q^2 + y_n p q + z_n p^2}{q^2}$$

であり, 分子  $x_n q^2 + y_n p q + z_n p^2$  は整数でさらに  $a_n > 0$  より 0 でない. 特に  $|x_n q^2 + y_n p q + z_n p^2| \geq 1$ . よって

$$|a_n| \geq \frac{1}{q^2}$$

となるはずだが, これは  $a_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) に矛盾. よって  $a_n$  は有理数でない.

7. 教科書の解答 (p.210) を参考のこと.
8.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n + c^n} = c$ .
9. 教科書の解答 (p.211) を参考のこと.

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 3

1.<sup>†</sup> 任意に  $\varepsilon > 0$  が与えられたとする .

(1)  $\delta = \min(\varepsilon/19, 1)$  とおくと ,  $0 < |x - 2| < \delta$  のとき

$$|x^3 - 8| = |x - 2| \cdot |(x - 2)^2 + 6(x - 2) + 12| < 19\delta \leq \varepsilon.$$

(2)  $\delta = \min(\varepsilon/6, 1)$  とおくと ,  $0 < |x - 2| < \delta$  のとき

$$|(x^2 + x) - 6| = |(x - 2)^2 + 5(x - 2)| \leq |x - 2| \cdot |(x - 2) + 5| < 6\delta \leq \varepsilon.$$

(3)  $\delta = \varepsilon$  とおくと ,  $0 < |x - 1| < \delta$  のとき  $x \neq 1$  であるので ,

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x - 1| < \delta = \varepsilon.$$

2. (1)  $\frac{7}{10}$  (2)  $\frac{7}{2}$  (3)  $-\frac{1}{5}$

(1)  $\frac{2x^2 - x - 6}{3x^2 - 2x - 8} = \frac{(2x+3)(x-2)}{(3x+4)(x-2)}$  より . (2)  $\frac{x^2 + 5x - 6}{x^2 - 1} = \frac{(x+6)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$  より .

3. (1) 2 (2)  $\frac{1}{2}$  (3) 1

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x - 1) &= \frac{(x^2 + 2x - 3) - (x - 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x - 1)} \\ &= \frac{4 - 1/x}{\sqrt{1 + 2/x - 3/x^2} + (1 - 1/x)} \\ &\rightarrow \frac{4}{1 + 1} = 2 \quad (x \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

$$(2) \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{1 + x} - \sqrt{1 - x}} = \frac{x^2 + x}{2x} \cdot \frac{\sqrt{1 + x} + \sqrt{1 - x}}{\sqrt{x^2 + x + 1} + 1} \rightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{1 + 1}{1 + 1} = \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow 0)$$

4.<sup>†</sup> (1) 連続 . この関数は  $f(x) = -x + 1/2$  ( $0 \leq x \leq 1/2$ ),  $x - 1/2$  ( $1/2 < x \leq 1$ ) とかける . まず区間  $[0, 1/2]$  および区間  $(1/2, 1]$  において . 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $\delta = \varepsilon$  としたとき ,  $0 < |x - a| < \delta$  ならば  $|f(x) - f(a)| = |x - a| < \delta = \varepsilon$  より , これらの区間で連続 . また  $a = 1/2$  のとき ,  $a - \delta < x < a$  において  $|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| < \varepsilon$  ,  $a < x < a + \delta$  において  $|f(x) - f(1/2)| = |x - 1/2| < \varepsilon$  であるので  $\lim_{x \rightarrow 1/2+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1/2-0} f(x) = 0 = f(1/2)$  . これより  $f$  は  $x = 1/2$  でも連続ゆえ区間  $[0, 1]$  で連続 .

---

4 月 25 日分 (凡例 : 無印は基本問題 , <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題 , \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

(2) 連続でない.  $\lim_{x \rightarrow 1/2+0} f(x) = +\infty$  となるため,  $x = 1/2$  で連続でない.

(3) 連続.

$x \neq 3/4$  のときは  $f(x) = 4x + 3$  なので連続. またこのとき  $\lim_{x \rightarrow 3/4} f(x) = 6 = f(3/4)$  であるので, 区間  $[0, 1]$  で連続である.

(4) 連続. 問題となるのは  $x = 0$  のときであるが,  $|x \sin(1/x)| \leq |x| \rightarrow 0$  ( $x \rightarrow +0$ ) なので,  $\lim_{x \rightarrow +0} f(x) = f(0)$ .

(3) は (1) と同様なので省略. (4) は, 定理 3.13 を使う.

5. (1) 有界でない ( $x \rightarrow +0$  で発散する)

(2) 有界 (任意の  $x$  に対して  $-1 \leq \sin x \leq 1$  であることより)

(3) 有界でない ( $x \rightarrow +0$  で発散する)

(4) 有界 (問題となるのは  $x \rightarrow +0$ ,  $1 - 0$  のときであるが, それぞれ  $f(x) \rightarrow 1$ ,  $(\sin 1)/2$  となり, 有界)

6. (1)  $+\infty$  (2)  $-\infty$  (3) 1 (4) 0

$\lim_{x \rightarrow 0} e^{1/x} = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} e^{1/x} = 0$  より.

7. 任意の  $\varepsilon > 0$  に対して,  $\delta = \min(\varepsilon/((|a| + 1)^n - |a|^n), 1)$  とすると,  $0 < |x - a| < \delta$  のとき

$$\begin{aligned} |x^n - a^n| &= \left| \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k (x - a)^{n-k} \right| \\ &\leq |x - a| \cdot \left| \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} |a|^k |x - a|^{n-k-1} \right| \\ &\leq \delta \left| \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} |a|^k - |a|^n \right| \\ &= ((|a| + 1)^n - |a|^n) \delta < \varepsilon. \end{aligned}$$

あとは多項式は  $1, x, x^2, \dots, x^n$  のスカラー倍と和でかけることより分かる.

8.\* ある正の数  $\varepsilon > 0$  が存在して, どんな正の数  $\delta > 0$  に対しても  $|x - a| < \delta$  かつ  $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$  となる.

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 4

1. (1)  $a_n > 0$  であり,

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2}{a_n(\sqrt{a_n^2 + 1} + 1)} \leq \frac{a_n}{2} \leq \frac{a_1}{2^n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

- (2) 簡単のため  $A_n := 2^{n+1}a_n$  とおく. 単調減少することは

$$A_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{a_n^2 + 1} + 1} A_n \leq A_n$$

となることから分かる. 0 でない実数に収束することを確認するために,  $\log A_n$  が収束することを確認する ( $A_n > 0$  は下に有界な単調減少列ゆえ収束することは分かっており, もし  $\log A_n$  が発散すればそれは  $A_n$  が 0 に収束するときしか起こり得ないので.) そのために, 次の事実「Cauchy 列は必ず収束する」を利用する<sup>\*1</sup>. まず,

- (1)  $\log x$  は  $x > 0$  で単調増加な関数である,

- (2)  $x > 1$  ならば  $\sqrt{x} < x$  である,

- (3)  $\log(2+x) \leq \log 2 + x/2$  ( $x > -2$ ) である,

- (4)  $\log A_{n+1} - \log A_n = \log 2 - \log(\sqrt{a_n^2 + 1} + 1)$  である

ことに注意する. さて,  $\varepsilon > 0$  を任意にとり, 自然数  $N$  を  $1/2^N < \varepsilon$  となるようにとる. 任意の二つの整数  $m, n \geq N$  ( $m \geq n$ ) に対して,

$$\begin{aligned} |\log A_m - \log A_n| &= \left| \sum_{k=n}^{m-1} \left( \log 2 - \log(\sqrt{a_k^2 + 1} + 1) \right) \right| \\ &= \sum_{k=n}^{m-1} \left( \log(\sqrt{a_k^2 + 1} + 1) - \log 2 \right) \\ &\leq \sum_{k=n}^{m-1} (\log(2 + a_k^2/2) - \log 2) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{m-1} a_k^2 \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} \\ &\leq \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^N} < \varepsilon. \end{aligned}$$

---

5 月 9 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

<sup>\*1</sup> Cauchy 列の定義などは教科書 p.30 の問題 3.22 を参照のこと.

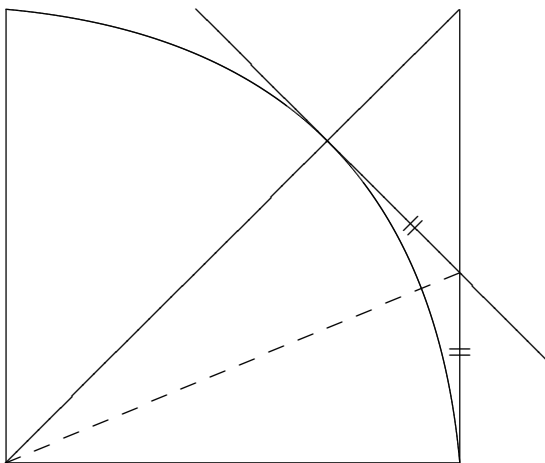


これより  $\log A_n$  は Cauchy 列であることがわかり，したがって収束するので，元の数列  $A_n$  は 0 でない実数に収束することが分かる．

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \pi$  である．この漸化式は  $\tan x$  ( $0 < x < \pi/2$ ) の半角公式

$$\tan \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{\tan^2 x + 1} - 1}{\tan x}$$

から来ており，初項は  $x = \pi/4$  に対応する．では  $A_n$  は何かというと，円周の半弧を外から近似する列になっている．



2. (1) 2 ( $a_1 = \sqrt{2}$  が正しい初期値) (2) 2 (3)  $\sqrt{2}$  (4)  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

(3), (4) は偶数の部分列が上に有界な単調増加列，奇数の部分列が下に有界な単調減少列になることをまず示し，その収束先をそれぞれ  $l, l'$  として

$$l = 1 + \frac{1}{l' + 1}, \quad l' = 1 + \frac{1}{l + 1}$$

等の方程式を解いて求める．

3.  $a_{n+1} = \frac{1}{2} \left( a_n + \frac{A}{a_n} \right)$  が正しい漸化式です．

$\alpha$  に収束すると仮定すると， $\alpha$  は  $\alpha = \frac{1}{2} \left( \alpha + \frac{A}{\alpha} \right)$ ，すなわち  $\alpha = \pm \sqrt{A}$ .  $a_n > 0$  なので，収束するならば  $\sqrt{A}$  しかありえないことがわかる．

$a_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{(a_n - \sqrt{A})^2}{2a_n} \geq 0$  より， $0 \leq \frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n} \leq 1$  ( $n \geq 2$ ) であるので，

$$a_{n+1} - \sqrt{A} = \frac{a_n - \sqrt{A}}{2} \cdot \frac{a_n - \sqrt{A}}{a_n} \leq \frac{a_n - \sqrt{A}}{2}.$$

これより

$$0 < a_{n+1} - \sqrt{A} < \frac{a_2 - \sqrt{A}}{2^{n-1}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

なので，はさみうちの原理より  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{A}$  である．

この漸化式は平方根の近似値を求めるのに利用される．

4. (1)  $+\infty$  (2) 1 (3)  $\pi^2/6$  (4)  $+\infty$  (5)  $1 - e^{-1/e}$  (6)  $e$

(1) は教科書の例題 3.20 を参考のこと．(3) はバーゼル問題で探すと導出法が色々見つかる．(5), (6) は与えられた関数のグラフを書いてみるとよい．

- 5.<sup>†</sup> (i) が成立しない場合： $f(x) = x$  でよい．

(ii) が成立しない場合：区間を  $I = (0, 1)$  として，関数としては例えば  $f(x) = x$  でよい．

(iii) が成立しない場合：区間を  $I = [0, 1]$  として，関数としては例えば  $f(x) = x$  ( $x \in [0, 1)$ ),  $0$  ( $x = 1$ ) とすると，最大値がない．

- 6.\* 教科書 (p.31) の定理 3.25 において，系 2.17(教科書 p.16) を用いて，閉区間上の数列の極限值が元の閉区間に再び属することを利用している．しかし，开区間では，その上の数列の極限值は必ずしももとの开区間に属するとは限らない．例えば  $a_n = 1/n$  は常に  $a_n \in (0, 1)$  であるが，その極限は  $0 \notin (0, 1)$  である．开区間においてこの性質が成り立たないのは「数列の極限が元の空間に属するとは限らないから」である．

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 5

- 1.†  $y = x^\alpha$  とすれば  $\log y = \alpha \log x$  なので両辺を  $x$  で微分すると  $\frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}$ . よって  $y' = \alpha y/x = \alpha x^{\alpha-1}$ .
2. (1)  $(1+x)^{m-1}(2-x)^{n-1}(2m-n-(m+n)x)$   
 (2)  $e^{px}((p+q)\cos qx + (p-q)\sin qx)$   
 (3)  $(\sin px)^{m-1}(\cos qx)^{n-1}(pm\cos px\sin qx - nq\sin px\cos qx)$
3. (1)  $\frac{a^2 - ax - x^2}{(a-x)^{1/2}(a+x)^{3/2}}$  (2)  $\frac{2x(6x^2-1)}{3(1-x^2+3x^4)^{2/3}}$  (3)  $\frac{a^2 \cos x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^{3/2}}$
- 4.† (1) 微分できない (右極限が  $+1$ , 左極限が  $-1$ )  
 (2) 微分できない ( $+\infty$  に発散)  
 (3) 微分できない (右極限が  $+1$ , 左極限が  $-1$ )  
 (4) 微分できない (右極限が  $+\pi/2$ , 左極限が  $-\pi/2$ )
5. (1)  $\frac{-(x+1)(5x^2+14x+5)}{8x+2)^4(x+3)^5}$  (2)  $\frac{(a+b)(ab-x^2)}{(a+x)^{1/2}(b+x)^{1/2}(a-x)^{3/2}(b-x)^{3/2}}$   
 (3)  $\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$  (4)  $x^x(\log x + 1)$
- 6.† (1) 連続であることは講義中で示した.  $\frac{f(h)-f(0)}{h} = \sin 1/h$  であるので  $h \rightarrow 0$  としてもこれは収束しないので,  $f$  は  $x=0$  における微分係数を持たない.  
 (2)  $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = -1$  であることより,  
 $\lim_{x \rightarrow 0} x \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}} = 0 = f(0)$  なので  $f$  は  $x=0$  で連続であるが,  
 $\frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{e^{1/x} - e^{-1/x}}{e^{1/x} + e^{-1/x}}$  であるためこれは左右の極限值が一致せず, したがって微分係数を持たない.
7. (1)  $\frac{dx-b}{-cx+a}^{*1}$  (2)  $\log(x + \sqrt{x^2+1})$  (3)  $\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} (|x| < 1)$
8. (1)  $\frac{\pi}{3}$  (2)  $\frac{\pi}{3}$  (3)  $\frac{5\pi}{12} (= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6})$
9. (1) 簡単のため  $\alpha = \text{Arctan } \frac{1}{2}$ ,  $\beta = \text{Arctan } \frac{1}{3}$  とおく.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = 1$$

であり,  $\tan \pi/4 = 1$  なので,  $\text{Arctan } \frac{1}{2} + \text{Arctan } \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$ .

---

5 月 16 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*1 行列  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  の逆行列と比較してみよ.

(2) 簡単のため  $\alpha = \text{Arctan } \frac{b}{a}$ ,  $\beta = \text{Arctan } \frac{a-b}{a+b}$  とおく .

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{b}{a} + \frac{a-b}{a+b}}{1 - \frac{b}{a} \cdot \frac{a-b}{a+b}} = \frac{b(a+b) + a(a-b)}{a(a+b) - b(a-b)} = 1.$$

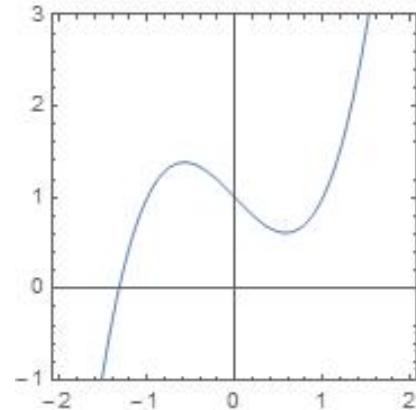
# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 6

1. (1)  $x = -1/\sqrt{3}$  で極大値  $1 + 2/(3\sqrt{3})$ ,  $x = 1/\sqrt{3}$  で極小値  $1 - 2/(3\sqrt{3})$ .  
 (2)  $x = 1, 2$  で極小値  $0$ ,  $x = 3/2$  で極大値  $1/16$ .  
 (3)  $x = -\sqrt{2} - 1$  で極小値  $(1 - \sqrt{2})/2$ ,  $x = \sqrt{2} - 1$  で極大値  $(\sqrt{2} + 1)/2$ .  
 (4)  $x = \sqrt{2}$  で極大値  $\frac{4+\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}}$ ,  $x = -\sqrt{2}$  で極小値  $\frac{4-\sqrt{2}}{4+\sqrt{2}}$ .

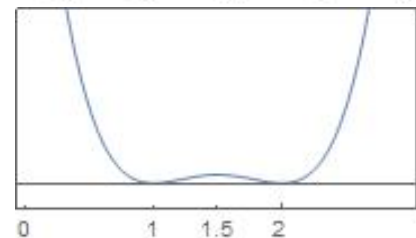
(1)

$x$	$-1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$
$f'$	$+$ $0$ $-$	$0$ $+$
$f$	$\nearrow$	$\searrow$ $\nearrow$



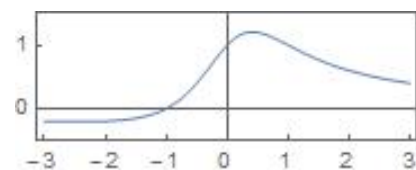
(2)

$x$	$1$	$3/2$	$2$
$f'$	$-$ $0$ $+$	$0$ $-$ $0$	$+$
$f$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$ $\nearrow$



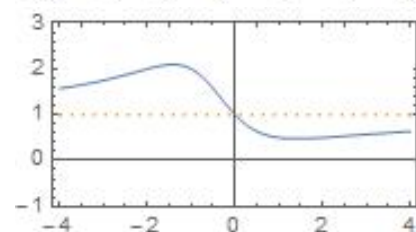
(3)

$x$	$-\sqrt{2} - 1$	$\sqrt{2} - 1$
$f'$	$-$ $0$ $+$	$0$ $-$
$f$	$\searrow$	$\nearrow$ $\searrow$



(4)

$x$	$0$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



2.†  $n$  は整数とする .

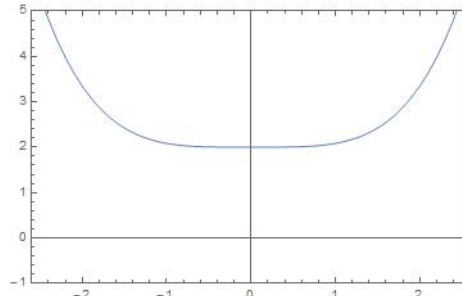
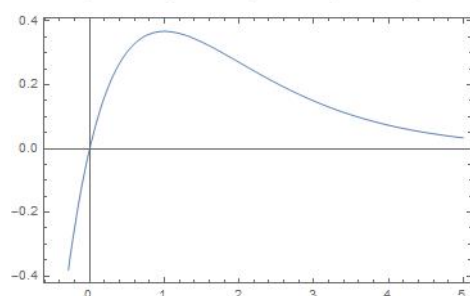
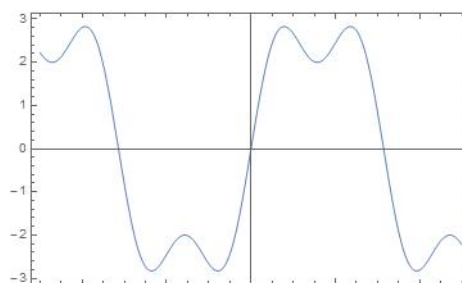
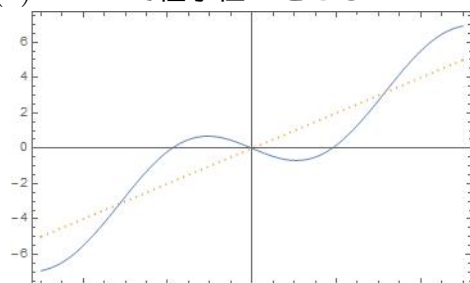
- (1)  $x = \pi/3 + 2n\pi$  で極小値  $\pi/3 + 2n\pi - \sqrt{3}$ ,  $x = -\pi/3 + 2n\pi$  で極大値  $-\pi/3 +$

$$2n\pi + \sqrt{3}.$$

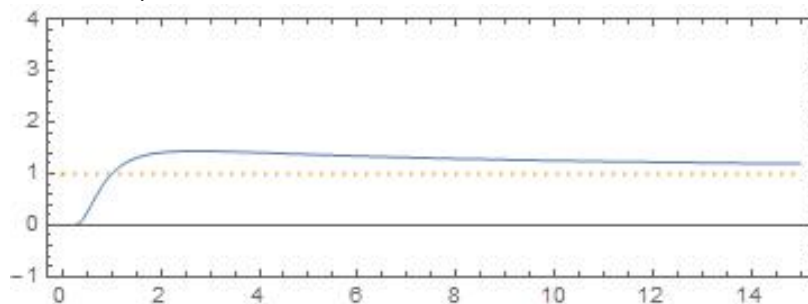
(2)  $\times$   $x = 2n\pi + \pi/2$  で極小値  $2$ ,  $x = 2n\pi + \pi/4, 2n\pi + 3\pi/4$  で極大値  $2\sqrt{2}$ ,  
 $x = 2n\pi - \pi/2$  で極大値  $-2$ ,  $x = 2n\pi - \pi/4, 2n\pi - 3\pi/4$  で極小値  $-2\sqrt{2}$  をとる.

(3)  $x = 1$  で極小値  $1/e$  をとる.

(4)  $x = 0$  で極小値  $2$  をとる.

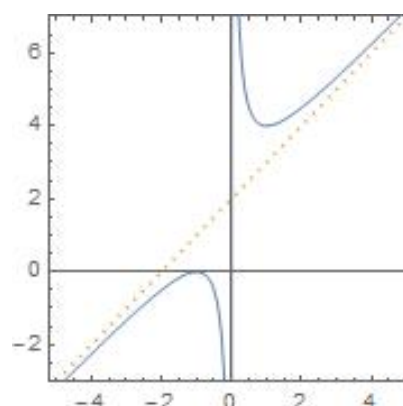


3<sup>†</sup>  $x = e$  で極大値  $e^{1/e}$  をとる. グラフの形からこれがこの関数の最大値になることも分かるので, 特に  $e^{1/e} > \pi^{1/\pi}$  が成り立つ. この両辺を  $e\pi$  乗すれば,  $e^\pi > \pi^e$  を得る.



4. 条件は  $a = 2\sqrt{b}$ ,  $b > 0$ .

$x$	$-\sqrt{b}$	$0$	$\sqrt{b}$
$f'$	$+$	$0$	$-$
$f$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$



5.  $g(x) \neq 0$  と仮定する .  $F(x) := f(x)/g(x)$  とすれば ,  $F'(x) = 0$  であるので  $F$  は定数関数ゆえ  $f(x) = cg(x)$  である .
- 6.<sup>†</sup> ヒントにおける  $\lambda, \mu$  はそれぞれ  $\lambda = f(b) - f(a), \mu = g(b) - g(a)$  となる . あとは平均値の定理を  $F$  に適用すればよい .
- 7.<sup>†</sup> (1),(2),(5) は双曲線関数の定義にしたがって計算すればよい . (3),(4) は教科書 p.49 の例題や問題を参考のこと .
8. 教科書の解答 p.213 を参照のこと .
9. 教科書の解答 p.213 を参照のこと .
- 10.\*  $(a + h)^3 = a^3 + h \cdot 3(a + \theta h)^2$  より式を整理して  $a + h/3 = 2a\theta + \theta^2 h$  である .  
 $a \neq 0$  のときは  $\theta = 1/2 + h/(ha) - \theta^2 h/(2a) \rightarrow 1/2$  ( $h \rightarrow 0$ ) . また  $a = 0$  のときは  $h/3 = \theta^2 h$  より  $\theta = 1/\sqrt{3}$  ( $0 < \theta < 1$  より) .

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 7

1. (1)  $\frac{24}{(1-x)^5}$  (2)  $\frac{5+18\sin^2 x + \sin^4 x}{\cos^5 x}$  (3)  $\frac{24x(1-x^2)}{(1+x^2)^4}$  (4)  $\frac{3x(2x^2+1)}{(1-x^2)^{7/2}}$   
 (1)  $\frac{x^3}{1-x} = \frac{1}{1-x} - (1+x+x^2)$  と変形する .
- 2.† (1)  $\frac{(-1)^n n!}{2} \left( \frac{1}{(x-1)^{n+1}} + \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right)$  (2)  $n \geq 4$  なら  $\frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$   
 (3)  $\frac{(-1)^n (n-2)!}{x^{n-1}}$  (4)  $\frac{3}{4} \sin \left( x + \frac{n\pi}{2} \right) - \frac{3^n}{4} \sin \left( 3x + \frac{n\pi}{2} \right)$  (5)  $2^{n/2} e^x \sin \left( x + \frac{n\pi}{4} \right)$   
 (1) 部分分数分解を用いる . (2) 問題 1 (1) の手法を用いる .  
 (3)  $\sin^3 x = (3 \sin x - \sin 3x)/4$
3. (1)  $\frac{(n-1)!}{x}$  (2)  $(-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+2}}$  (3)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 n! (1+x)^k (1-x)^{n-k}$   
 (1)  $y = x^{n-1} \log x$  とおく .  $y' = (n-1)x^{n-2} \log x + x^{n-2}$  .  $y^{(n)} = (y')^{(n-1)} = (n-1)(x^{n-2} \log x)^{(n-1)}$  . これを繰り返す . (2)  $n = 1, 2$  として計算し ,  $(x^{n-1} e^{1/x})^{(n)} = (-1)^n \frac{e^{1/x}}{x^{n+2}}$  と予測して , 帰納法で示す . (3) Leibniz の公式を用いる .
- 4.† (1)  $\frac{1}{2} \left[ (\alpha + \beta)^n \sin \left( (\alpha + \beta)x + \frac{n\pi}{2} \right) - (\alpha - \beta)^n \sin \left( (\alpha - \beta)x + \frac{n\pi}{2} \right) \right]$   
 (2)  $\alpha^{n-2} \left\{ (\alpha^2 x^2 - n^2 + n) \sin \left( \alpha x + \frac{n\pi}{2} \right) - 2n\alpha x \cos \left( \alpha x + \frac{n\pi}{2} \right) \right\}$   
 (3)  $(ad-bc) \frac{(-c)^{n-1} n!}{(cx+d)^{n+1}}$  (4)  $\frac{(-1)^n n!}{ad-bc} \left( \frac{a^{n+1}}{(ax+b)^{n+1}} + \frac{c^{n+1}}{(cx+d)^{n+1}} \right)$   
 (1) 三角関数の和積の公式より . (2) Leibniz の公式より . (3)  $\left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$  .  
 (4) 部分分数分解 .
- 5.† 教科書 p.53 の命題 4.50 を参照のこと .
6. (1)  $f_2'(x) = 4x^3 \sin(1/x) - x^2 \cos(1/x)$  ( $x \neq 0$ ),  $f_2'(0) = 0$  である . また  $f_2''(x) = 12x^2 \sin(1/x) - 6x \cos(1/x) - \sin(1/x)$  ( $x \neq 0$ ),  $f_2''(0) = 0$  なので  $f_2(x)$  は 2 階微分可能である . しかし ,  $f_2''(x)$  は  $x = 0$  で連続ではない ( $\sin(1/x)$  の項が邪魔している) . よって  $f_2$  の 2 階微分  $f_2''(x)$  は連続でないので  $C^2$ -級でない .  
 (2) 帰納法を用いる .  $g_k(x) := x^{2k} \cos(1/x)$  とおく . 明らかに  $g_1(x)$  は 1 階微分可能であるが ,  $C^1$ -級でない . そこで ,  $f_{k-1}(x)$  および  $g_{k-1}(x)$  がともに  $(k-1)$  階微分可能であるが  $C^{k-1}$ -級でない , つまり  $f_{k-1}^{(k-1)}(x)$  および  $g_{k-1}^{(k-1)}(x)$  が存在するが不連続



であるとする (明らかに不連続点は  $x = 0$  である) . さて ,

$$\begin{aligned} f'_k(x) &= 2kx^{2k-1} \sin \frac{1}{x} - x^{2k-2} \cos \frac{1}{x} = 2kx f_{k-1}(x) - g_{k-1}(x), \\ g'_k(x) &= 2kx^{2k-1} \cos \frac{1}{x} + x^{2k-2} \sin \frac{1}{x} = 2kx g_{k-1}(x) + f_{k-1}(x) \end{aligned}$$

である .  $f_{k-1}(x)$  および  $g_{k-1}(x)$  がともに  $(k-1)$  階微分可能であるので ,  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$  は  $k$  階微分可能である事がわかる . しかし ,

$$f_k^{(k)}(x) = (2kx f_{k-1}(x) - g_{k-1}(x))^{(k)} = 2kx f_{k-1}^{(k-1)}(x) + 2k f_{k-1}^{(k-2)}(x) - g_{k-1}^{(k-1)}(x)$$

であり , 第 1 項・第 2 項は  $x \rightarrow 0$  のとき 0 に収束するが , 第 3 項は , 帰納法の仮定より  $x \rightarrow 0$  のとき不連続である (第 1 項ははさみうち , 第 2 項は  $f_{k-1}(x)$  が  $k-1$  階微分可能であることより特に  $f_{k-1}^{(k-2)}(x)$  は  $x = 0$  で連続であるので) .  $g_k(x)$  に関しても同様である . よって  $f_k(x)$ ,  $g_k(x)$  はともに  $k$  階微分可能であるが ,  $C^k$ -級関数でない .

7.† (1)  $1 + \frac{1}{2}x^2$  (2)  $1 + x + x^2 + \frac{2}{3}x^3$  (3)  $1 - \frac{1}{3}x^3$  (4)  $x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$  (5)  $x^2 - \frac{1}{2}x^3$

8. (1) 教科書の p.216 にある問題 4.68 の解答を参考のこと . (2)  $\binom{-1}{k}$  の分子は  $(-1) \cdot (-1-1) \cdots (-1-k+1) = (-1)^k \cdot 1 \cdot 2 \cdots k = (-1)^k k!$  であることより . (3) 教科書 p.61 なかほどにある式を参考のこと .

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 8

1. (1)  $1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} + o(x^2)$  (2)  $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$  (3)  $1 + x^2 - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$  (4)  $1 + \frac{x^2}{3} - \frac{x^4}{9} + o(x^4)$   
 (考え方) (1)  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$  より  $\frac{x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 + (x/2 + x^2/6 + o(x^2))}$ . ここで  $\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o(u^2)$  を用いれば良い. (2) 公式 (教科書の定理 4.69) を用いる. または  $\sqrt{1+x} = e^{\frac{1}{2} \log(1+x)}$  を用いても計算できる. (3)  $(1+x)^x = e^{x \log(1+x)} = e^{x^2 - x^3/3 + o(x^3)} = 1 + (x^2 - x^3/3 + o(x^3)) + (x^2 - x^3/3 + o(x^3))^2$  より. (4) (2), (3) と同様. ただし,  $\log(1+x^2) = x^2 - x^4/2 + o(x^4)$  に注意.
- 2.† (1)  $1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^4)$  (2)  $1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^4)$  (3)  $2 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)$   
 (4)  $x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{2x^6}{45} + o(x^6)$  (5)  $1 - x^2 + \frac{x^4}{3} + o(x^4)$  (6) \*1  $\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3)$   
 (7)  $x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + o(x^5)$  (8)  $1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$   
 (考え方) (1)  $\sec x$  は偶関数より  $\sec x = a_0 + a_2 x^2 + a_4 x^4 + o(x^4)$  とおける. そこで,  $\sec x \cos x = 1$  において  $\sec x, \cos x$  それぞれに Taylor 展開したものを代入して, 係数比較. また,  $\frac{1}{\cos x} = \frac{1}{1 - (x^2/2 - x^4/4! + o(x^4))}$  として,  $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + o(u^2)$  を用いる方法もある. (4)  $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^5)$  より  $(x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^5))^2 = x^2 - 2 \cdot x^4/6 + (2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{5!} + (1/6)^2)x^6 + o(x^6)$  (展開時,  $x^6$  以上の項は  $o(x^6)$  に吸収される) (7)  $(\text{Arcsin } x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  を利用する.  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = e^{-\frac{1}{2} \log(1-x^2)} = e^{-\frac{1}{2}(-x^2 + x^4/2 + o(x^4))} = 1 + (x^2/2 + x^4/4) + (x^2/2 + x^4/4)^2 + o(x^4) = 1 + x^2/2 + 3x^4/8 + o(x^4)$ . これを積分すればよい. (8) 大問 1 (2) の結果に  $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^5)$  を代入して整理する.
3. (1)  $\frac{3x^5}{20} + o(x^5)$  (2)  $2 - \frac{x^2}{4} - \frac{5x^4}{64} + o(x^4)$
4.  $x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + o(x^9)$   
 (考え方)  $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - x^7/7! + x^9/9! + o(x^9)$ ,  $\cos x = 1 - x^2/2 + x^4/4! - x^6/6! + x^8/8! + o(x^8)$  として,  $\tan x \cos x = \sin x$  の恒等式を利用して, 係数比較する.  $\tan x$  は奇関数なので  $\tan x = a_1 x + a_3 x^3 + a_5 x^5 + a_7 x^7 + a_9 x^9 + o(x^9)$  として計算するとよい.
- 5.† (1) 1 (2) 1 (3)  $\frac{1}{6}$  (4)  $\bigcirc \frac{1}{4}; \times -\frac{1}{2}$  (5)  $-\frac{9}{4}$

6 月 6 日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

\*1 出題ミスです.  $\frac{x}{\tan x}$  でした. これは Laurent 級数展開と呼ばれるものになります. 複素関数論で習うと思います.

(考え方) (1)  $\sin x = x + o(x)$ ,  $\cos x = 1 - x^2/2 + o(x^4)$  とすれば,

$$\begin{aligned}(1 - \cos x)^{\sin x} &= (x^2/2 + o(x^2))^{x+o(x)} = (1/8(2x)^2)^{x+o(x)}(1 + o(x^2))^{x+o(x)} \\ &= (1/8)^{x+o(x)} \cdot (2x)^{2x+o(x)}(1 + o(x^2))^{x+o(x)}.\end{aligned}$$

ここで  $x \rightarrow 0$  のとき, 第 1 項は  $\rightarrow 1$ , 第 2 項は  $\rightarrow 1$ , 第 3 項も  $\rightarrow 1$  であるので全体としても  $\rightarrow 1$  となる. (2)  $\sin x = x + o(x)$  なので  $x^{x+o(x)} \rightarrow 1$ . (3)  $\sin x = x - x^3/6 + o(x^3)$  より  $e^x - e^{\sin x} = e^x(1 - e^{-x^3/6 + o(x^3)}) = e^x(x^3/6 + o(x^3))$ . よって,  $(e^x - e^{\sin x})/x^3 = \frac{1}{6}e^x(1 + o(1)) \rightarrow \frac{1}{6}$ . (3)  $\sin x = x - x^3/6 + x^5/5! + o(x^5)$ ,  $\text{Arcsin } x = x + x^3/6 + 3x^5/40 + o(x^5)$  より  $\text{Arcsin } x + \sin x - 2x = (1/5! + 3/40)x^5 + o(x^5)$ . また  $\text{Arctan } x = x - x^3/3 + o(x^3)$  なので  $x^2(x - \text{Arctan } x) = \frac{1}{3}x^5 + o(x^5)$ . よって,  $(\text{Arcsin } x + \sin x - 2x)/(x^2(x - \text{Arctan } x)) = 3 \cdot (1/5! + 3/40) = \frac{1}{4}$ . (5)  $\sec x = 1 + x^2/2 + 5x^4/24 + o(x^4)$ ,  $\cos^2 x = 1 - x^2 + x^4/3 + o(x^4)$ ,  $\sin^2 x = x^2 - x^4/3 + o(x^4)$  より  $2 \sec x - 2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x = (5/12 - 2/3 + 1)x^4 + o(x^4)$ . 一方  $\log(1 + 2x) = 2x + o(x)$  なので  $(\sin x - x) \log(1 + 2x)(-x^3/6 + o(x^3)) \cdot (2x + o(x)) = -\frac{1}{3}x^4(1 + o(x))$ . 以上より  $(2 \sec x - 2 \cos^2 x - 3 \sin^2 x)/((\sin x - x) \log(1 + 2x)) = ((5/12 - 2/3 + 1)x^4 + o(x^4))/(-\frac{1}{3}x^4(1 + o(x))) = -3(5/12 - 2/3 + 1)(1 + o(x))/(1 + o(x)) \rightarrow -9/4$ .

6\* (1) 0 (2) 極限は存在しない.

7\*  $(1 + x)^\alpha \doteq 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2$  でした.

(1) 1.974 (2) 5.065797 (3) 2.99255

(考え方) (1)  $\sqrt[5]{30} = \sqrt[5]{32 - 2} = 2(1 - 1/16)^{1/5}$  と見る. (2)  $\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{125 + 5} = 5(1 + 1/25)^{1/3}$  と見る. (3)  $\sqrt[5]{240} = 3\sqrt[5]{\frac{240}{243}} = 3(1 + 1/80)^{-1/5}$  と変形する. ( $\sqrt[5]{240} = \sqrt[5]{243 - 3} = 3(1 - 1/81)^{1/5}$  でもよい.) ちなみに少数第 30 位までの数値は

(1) 1.97435048583481984267283617241

(2) 5.06579701910088626940241001719

(3) 2.99255573947768947701620427866

8\* (1) 0.4794 (2) 0.8775 (3) 0.5463 (4) 1.6487

いずれも Taylor 多項式を用いる. ちなみに少数第 30 位までの数値は

(1) 0.479425538604203000273287935216

(2) 0.877582561890372716116281582604

(3) 0.546302489843790513255179465780

(4) 1.64872127070012814684865078781

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 9

1<sup>†</sup> 4月18日分小テストの解答を参考のこと。

2. (1) 正しい。与えられた  $x \in \mathbb{R}$  に対して,  $y := -x$  とすればよい。

(2) 誤り。どんな  $x \in \mathbb{R}$  に対しても,  $x+1, x-1$  の少なくとも片方は 0 ではないから。

(3) 誤り。 $x=0$  とすれば, すべての  $y \in \mathbb{R}$  に対して  $xy=0$ 。

(4) 正しい。 $x=0$  とすればよい。

3<sup>†</sup>  $C^1$  級とは 1 階導関数が存在して連続であること,  $C^2$  級とは 2 階導関数が存在して連続であることである。 $x \neq 0$  のとき  $f(x)$  を微分すれば

$$f'(x) = 4x^3 \sin \frac{1}{x} - x^2 \cos \frac{1}{x}$$

であり,  $x=0$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h^3 \sin \frac{1}{h} = 0$$

より  $f'(0) = 0$  である。また,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (4x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}) = 0$$

より,  $f'(x)$  は  $x=0$  においても連続である (それ以外の点で連続であることは, 連続関数の合成関数であることから明らか)。よって  $f$  は  $C^1$  級である。2 階微分を調べる。 $x \neq 0$  のとき,

$$f''(x) = 12x^2 \sin \frac{1}{x} - 6x \cos \frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x}$$

であり,  $x=0$  における微分係数は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h (4h^2 \sin \frac{1}{h} - \cos \frac{1}{h}) = 0$$

より  $f''(0) = 0$  である。しかし,  $\lim_{x \rightarrow 0} f''(x)$  を考えると, 第 3 項の  $\sin \frac{1}{x}$  が  $x \rightarrow 0$  のとき振動してしまい, 収束しない。つまり,  $f''(x)$  は  $x=0$  において連続でない。よって  $f$  は  $C^2$  級の関数でない。

---

6月20日分 (凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題)

講義用 HP: <http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2017C.html>

4. (1)  $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$   
 (2)  $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$   
 (3)  $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + o(x^4)$   
 (4)  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3x^4}{8} + o(x^4)$
5. (1)  $n$  が偶数のとき,  $\alpha^{n-2}((\alpha^2 x^2 + n^2 - n) \sinh \alpha x + 2\alpha n x \cosh \alpha x)$ ,  $n$  が奇数のとき,  $\alpha^{n-2}((\alpha^2 x^2 + n^2 - n) \cosh \alpha x + 2\alpha n x \sinh \alpha x)$   
 (2)  $\alpha^{n-2}(((x^2 - 1)\alpha^2 - n(n-1)) \cos(\alpha x + \frac{n\pi}{2}) + 2n\alpha x \sin(\alpha x + \frac{n\pi}{2}))$   
 (3)  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \sin(\alpha x + \frac{k\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n \sin(\alpha x + \frac{n\pi}{4})$ .

どれも Leibniz の公式を適用すればよい. (3) は  $n = 1, 2$  の場合を計算して帰納法に持ち込むほうが賢いかもしれない.

6. (1)  $\frac{3\pi}{4}$  (2) 出題ミスでした:  $\text{Arcsin } \frac{1}{4} + 2 \text{Arcsin } \frac{\sqrt{6}}{4}$  でした. この場合は  $\frac{\pi}{2}$  です.  
 (3)  $\frac{\pi}{4}$  (4)  $\frac{\pi}{4}$   
 (1)  $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arctan } 2 \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $\frac{\pi}{4} \leq \text{Arctan } 3 \leq \frac{\pi}{2}$  より,  $\frac{\pi}{2} \leq \text{Arctan } 2 + \text{Arctan } 3 \leq \pi$  となることに注意.  
 (4)  $\alpha = \text{Arctan}(1/7)$ ,  $\beta = \text{Arctan}(3/79)$  としたとき,  $\tan 2\alpha = 7/24$ ,  $\tan 4\alpha = 336/527$ ,  $\tan 5\alpha = 2879/3353$  および  $\tan 2\beta = 237/3116$  となる.  $\tan$  の加法定理の練習に.
7. (3) について考える ( $m = 1, 2$  とすれば (1), (2) と同じになる).  $f(x) = x^m$  とおく. 区間  $[0, 1]$  を  $n$  等分したとき, 区分別積法による和を  $S_n$  と書けば,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{n} * f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n \left(\frac{k}{n}\right)^m = \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{k=0}^n k^m.$$

ここで自然数の  $m$  乗和  $\sum_{k=0}^n k^m$  は  $\frac{1}{m+1}n^{m+1} + (n \text{ の } m \text{ 次以下の多項式})$  という形の多項式になることを踏まえる (次ページ参照) と,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{m+1}n^{m+1} + (n \text{ の } m \text{ 次以下の多項式})}{n^{m+1}} = \frac{1}{m+1}.$$

よって  $\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1}$ .

- 8.† (1)  $\sinh x$  (2)  $\cosh x$  (3)  $\text{Arctan } x$  (4)  $\text{Arcsin } x$

自然数の  $m$  乗和  $\sum_{k=0}^n k^m$  は  $\frac{1}{m+1}n^{m+1} + (n \text{ の } m \text{ 次以下の多項式})$  という形の多項式になることについて .

自然数の  $m$  乗和  $\sum_{k=0}^n k^m$  を  $S_m$  で表す . まず二項定理により , 各自然数  $k$  に対して

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = (m+1)k^m + \sum_{l=2}^{m+1} \binom{m+1}{l} k^{m+1-l}$$

が成り立つ . この両辺を  $k=1$  から  $k=n$  まで足し合わせると ,

$$(n+1)^{m+1} - 1 = (m+1) \sum_{k=1}^n k^m + \sum_{l=2}^{m+1} \binom{m+1}{l} \sum_{k=1}^n k^{m+1-l}.$$

つまり ,

$$(m+1)S_m = (n+1)^{m+1} - 1 - \sum_{l=2}^{m+1} \binom{m+1}{l} S_{m+1-l}$$

である . ここで帰納法を用いる . つまり ,  $m$  より小さい数  $r$  に対しては  $S_r$  を  $n$  に関して降べきの順に書いたときの最初の項が  $\frac{1}{r+1}n^{r+1}$  であると仮定すると , 上式の右辺の総和記号の中の  $n$  の最大次数は  $m$  であることがわかる (つまり  $m+1$  次の項は存在しない) . 一方 ,  $(n+1)^{m+1}$  があるので , これを二項展開すれば , 右辺の  $n$  の最大次数は  $m+1$  であることがわかる . これより ,  $S_m$  を  $n$  に関して降べきの順に書いたときの最初の項が  $\frac{1}{m+1}n^{m+1}$  であることがわかる .

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 10

- 1.† (1)  $\begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq m) \end{cases}$  (2) 0 (3)  $\begin{cases} \pi & (n = m) \\ 0 & (n \neq 0) \end{cases}$
2. (1)  $x \operatorname{Arcsin} x + \sqrt{1-x^2}$  (2)  $x \log x - x$  (3)  $\frac{1}{2}(x^2+1) \operatorname{Arctan} x - \frac{x}{2}$
3. (1)  $\operatorname{Arcsin} \frac{x}{a}$  (2)  $\operatorname{Arctan}(x-a)$  (3)  $\frac{1}{2} \left( x\sqrt{a^2-x^2} + a^2 \operatorname{Arcsin} \frac{x}{a} \right)$
4. (1)  $\operatorname{Arctan} x$  (2)  $\frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+1} + \operatorname{Arctan} x \right)$  (3)  $\frac{1}{8} \left( \frac{x(3x^2+5)}{(x^2+1)^2} + 3 \operatorname{Arctan} x \right)$
- 5.† (1)  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$  (2)  $\frac{1}{3} \left( \frac{x+2}{x^2+x+1} - \frac{1}{x-1} \right)$  (3)  $\frac{1}{x} - \frac{x-1}{x^2+1}$   
 (4)  $\frac{1}{3} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x-1}{x^2+x+1} \right)$  (5)  $x + \frac{1}{2} \left( \frac{3}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$
- 6.† (1)  $\frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right|$  (2)  $\frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{3} \log|x-1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$   
 (3)  $\operatorname{Arctan} x + \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2+1)$   
 (4)  $\frac{1}{6} \log(x^2-x+1) - \frac{1}{3} \log|x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x-1}{\sqrt{3}}$   
 (5)  $\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1|$
7. (1)  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{x-\sqrt{2}}{x^2-x+1} \right)$  (2)  $\frac{1}{2\sqrt{2}} \left( \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} - \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1} \right)$   
 (3)  $\frac{1}{2} \left( \frac{x}{x^2+\sqrt{2}x+1} + \frac{x}{x^2-\sqrt{2}x+1} \right)$
- 8.† (1)  $\frac{e^{ax}}{a} \left( x^3 - \frac{3}{a}x^2 + \frac{6}{a^2}x - \frac{6}{a^3} \right)$  (2)  $\frac{1}{2}(x^2+1)e^{-x^2}$  (3)  $\frac{1}{3} \log \frac{e^x+1}{e^x+4}$   
 (4)  $\frac{1}{2} \operatorname{Arctan} \frac{x^2\sqrt{a^4-x^4}}{x^4-a^4}$  (5)  $\log(\sqrt{x^2-a^2}+x)$  (6)  $\frac{1}{4} \left( \log \left| \frac{x+1}{x-1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} \right)$   
 (7)  $\frac{x^2}{2} \log|x| - \frac{x^2}{4}$  (8) 出題ミスです．正しくは  $(\operatorname{Arcsin} x)^2$  でした．この場合は部分積分を用いて  $x(\operatorname{Arcsin} x)^2 + 2\sqrt{1-x^2} \operatorname{Arcsin} x - 2x$  となります．元の場合は初等関数で表すことができないようです．
- (解法略説) (1), (2) 部分積分を三回行う．(3)  $t = e^x$  (4)  $t = x^2$  (5)  $s = \sqrt{x^2-a^2}+x$   
 (6) 部分分数分解 (7) 部分積分

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 11

1.  $t = \tan \frac{x}{2}$  と変数変換する. (1) は  $s = \sin x$  としてもできる.

$$(1) \frac{1}{16} \log \left| \frac{(\tan \frac{x}{2} + 1)^8}{(\tan \frac{x}{2} - 1)^2 (5 \tan^2 \frac{x}{2} + 6 \tan \frac{x}{2} + 5)^3} \right|$$

$$\text{或いはさらに変形して } \frac{1}{4} \log \left| \frac{(1 + \sin x)^4}{(1 - \sin x)(5 + 3 \sin x)^3} \right|$$

$$(2) \log(2 + \cos x) + \frac{4}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \quad (3) \frac{x}{2} + \operatorname{Arctan} \left( \frac{1+a}{1-a} \tan \frac{x}{2} \right)$$

2.  $t = \tan \frac{x}{2}$  と変数変換する.

$$(1) \tan \frac{x}{2} \quad (2) \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \quad (3) \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctanh} \frac{\tan \frac{x}{2}}{\sqrt{3}} \quad (4) -\frac{\cos x}{\sin x}$$

3.  $t = \tan x$  と変数変換する.

$$(1) \frac{1}{ab} \operatorname{Arctan} \left( \frac{b}{a} \tan x \right) \quad (2) \frac{2}{3} \operatorname{Arctan} \left( \frac{\tan x}{2} \right) - \frac{x}{3}$$

$$(3) \frac{ax}{a^2 + b^2} + \frac{b}{a^2 + b^2} \log |a \cos x + b \sin x| \quad (4) \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{8} - \frac{\sqrt{3}}{4} \operatorname{Arctan} \frac{\tan x}{\sqrt{3}}$$

$$4. (1) \text{発散する.} \quad (2) \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \pi \quad (3) \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

(1) は  $x \rightarrow 0$  と  $x \rightarrow \infty$  の二つについて考える必要がある. 次回扱う内容ですので, 出題ミスです.

$$5.^\dagger \quad I(a, b) = -\frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}, \quad J(a, b) = -\frac{b \cos bx + a \sin bx}{a^2 + b^2} e^{-ax}$$

$I(a, b)$  に関して一回部分積分をすれば  $aI(a, b) + bJ(a, b) = -e^{-ax} \cos bx$ ,  $J(a, b)$

に関して一回部分積分をすれば  $-bI(a, b) + aJ(a, b) = -e^{-ax} \sin bx$  なので, これを

$I(a, b)$ ,  $J(a, b)$  に関して解く.

$$6.^\dagger \quad (1) \frac{a}{a^2 + b^2} \quad (2) \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$7.^\dagger \quad (1) \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{Arcsin} \frac{\sqrt{2}x}{1+x^2} \quad (2) 2 \operatorname{Arctan} \left( \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \right) - \sqrt{1-x^2}$$

$$(3) \log(x + \sqrt{x-1}) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{3}}$$

$$(4) \frac{1}{2} \left( x^2 - x\sqrt{x^2-1} + \log |x + \sqrt{x^2-1}| \right) \quad (5) -\log \left| \frac{x+2+2\sqrt{x^2+x+1}}{x} \right|$$

$$(6) \log |\sin x| - \frac{\sin^2 x}{2} \quad (7) 2\sqrt{\sin x} \left( \frac{\sin x}{3} - \frac{\sin^3 x}{7} \right) \quad (8) -\frac{1}{12} \frac{3e^{2x} + 1}{(e^{2x} + 1)^3}$$



# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 12

1. (1) 収束する (2) 収束する (3) 収束する

(考え方) (1)  $(x^2 + 1)^5 \approx x^{10}$  より収束と当たりをつけ、上から抑える関数を探す。この場合は  $\frac{1}{x^{5/2}}$  で十分。(2)  $\frac{e^x}{\cosh(2x)} \approx 2e^{-x}$  より収束と当たりをつけ、上から抑える関数を探す。この場合は  $2e^{-x}$  で十分。(3) 原始関数が計算できるので直接 ( $x = \sin \theta$  と変数変換)。

- 2.† (1)  $\alpha > \frac{1}{2}$  (2)  $\alpha < \beta$  (3)  $\alpha - 1$  かつ  $\beta > 0$

(考え方) (1) 問題が生じるのは  $x \rightarrow +\infty$  のとき。 $(x^2 + 1)^\alpha \approx x^{2\alpha}$  より  $2\alpha > 1$  ならばよいと当たりをつけられる。実際、 $x$  が十分大きいとき  $0 < x^{2\alpha} < (x^2 + 1)^\alpha < (x + 1)^{2\alpha}$  より

$$\frac{1}{(x + 1)^{2\alpha}} < \frac{1}{(x^2 + 1)^\alpha} < \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

なので  $2\alpha > 1$  ならば収束し、 $2\alpha \leq 1$  ならば発散する。(2) 問題が生じるのは  $x \rightarrow +\infty$  のとき。 $\frac{e^{\alpha x}}{(\cosh x)^\beta} \approx e^{(\alpha - \beta)x}$  より  $\alpha - \beta < 0$  ならばよいと当たりをつけられる。実際、 $x$  が十分大きいとき、 $0 < e^{(\alpha - \beta)x} < \frac{e^{\alpha x}}{(\cosh x)^\beta} < 2^\beta e^{(\alpha - \beta)x}$  なので  $\alpha < \beta$  ならば収束し、 $\alpha \geq \beta$  ならば発散する。(3) 教科書の問題 5.98 を参照。

- 3.† (1) 発散する。積分区間に不連続点  $x = 1$  があり、それが原因。(出題ミス。本来は積分の下端が 1 であった。この場合は  $\frac{\pi}{2}$  となる。) (2)  $\pi$  (3)  $\frac{\pi}{2}$

(考え方) (1) (下端を 1 としたとき)  $s = \sqrt{x^2 - 1} + x$  と変数変換。他にも  $t = \sqrt{x^2 - 1}$  や  $u = 1/x$  などでも計算できる。(2)  $x(1 - x) = (\frac{1}{2})^2 - (x - \frac{1}{2})^2$  より、原始関数は  $\text{Arcsin}$  で書ける。(3)  $t = e^x$  と変数変換。

4. (1)  $ab > 0$  のとき収束し、 $\frac{\pi}{2\sqrt{ab}}$ 、 $ab < 0$  のときは発散する。(2)  $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$  (3)  $ab > 0$  のとき収束し、 $\frac{\pi}{4\sqrt{ab}} (\frac{1}{a} + \frac{1}{b})$ 、 $ab < 0$  のときは発散する。

(考え方) (1), (3)  $t = \tan x$  と変数変換。(2) は  $\cos^4 x + \sin^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$  と変形して  $t = \tan 2x$  とする。積分区間に注意。

5. (1) 正しい。(2) 誤り。積分区間に不連続点  $x = 1$  があり、定義に従って計算すると発散する。(3) 正しい。

(考え方) (1) は定義どおり。(2) 積分区間内に不連続点がある。(3)  $x \rightarrow +0$  および  $x \rightarrow +\infty$  の 2 箇所に広義積分があるが、これらはいずれも収束する。変数変換

$x = 1/t$  をすれば  $I = -I$  となるので,  $I = 0$  となる.

- 6.† (1), (2), (3) いずれも  $n$  が偶数のとき  $\frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot \frac{\pi}{2}$ ,  $n$  が奇数のとき  $\frac{(n-1)!!}{n!!}$ . ただし,  $k!!$  は一つおき階乗 (教科書 p.60 参照). (4)  $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \cdot \frac{\pi}{2}$

(考え方) (1) と (2) が等しいことは変数変換  $y = \frac{\pi}{2} - x$  により分かる. また (1) と (3) が等しいことは, (3) において  $x = \sin \theta$  と変数変換することにより分かる. さらに, (4) において  $x = \cos \theta$  と変数変換すれば (2) において  $n \rightarrow 2n - 2$  としたものと一致することが分かる. よって, この問題は本質的には (1) を求めればすべて求まる.

$I_n$  とおく.  $(\sin x)^n = -(\cos x)'(\sin x)^{n-1}$  とみて部分積分することにより  $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$  という漸化式を得る. ここで明らかに  $I_0 = \frac{\pi}{2}$ ,  $I_1 = 1$  であるので解答を得る.

7. (1) 問題となるのは  $x \rightarrow +0$  のときと  $x \rightarrow +\infty$  のとき.  $x \rightarrow +0$  のときは大体  $\log x$  なので問題がなく,  $x \rightarrow +\infty$  のときは  $\frac{\log x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(x+1)^{3/2}} \cdot \frac{\log x}{\sqrt{x+1}}$  で後者は 0 に収束し, 前者の広義積分は収束する. よって, 問題の広義積分も収束する. (2)  $|\sin x| \leq 1$  であり,  $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$  であるので, 問題の広義積分も収束する. (3) 問題となるのは  $x \rightarrow +0$  のときと  $x \rightarrow +\infty$  のときであるが, 後者の場合は (2) と同様の理由で収束する. また  $x \rightarrow +0$  のときは  $\frac{\sin x}{x^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sin x}{x}$  であり前者の広義積分は収束し後者は 1 に収束するので, 問題の広義積分も収束する.

- 8.\* 演習問題 11 の大問 5 より  $\int e^{-x} \sin x dx = \frac{\cos x - \sin x}{2} e^{-x}$  であることを用いる. 三角関数  $\sin x$  の周期は  $2\pi$  なので, 積分区間  $[2k\pi, (2k+2)\pi]$  で計算したあと,  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$  とし足し合わせる.  $k$  番目の区間での積分の結果は  $\frac{e^{\pi} + 2 + e^{-\pi}}{2} e^{-(2k+1)\pi}$  である.

# 微分積分学・同演習 A

## 演習問題 13

$$1.^\dagger \quad (1) I_{n+1} = \frac{2n-1}{2n} I_n + \frac{1}{2n} \cdot \frac{x}{(1+x^2)^n} \quad (2) I_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{x}{1+x^2} + \operatorname{Arctan} x \right)$$

$$I_3 = \frac{1}{8} \left( \frac{2x}{(1+x^2)^2} + \frac{3x}{1+x^2} + 3 \operatorname{Arctan} x \right)$$

$$I_4 = \frac{1}{48} \left( \frac{8x}{(1+x^2)^3} + \frac{10x}{(1+x^2)^2} + \frac{15x}{1+x^2} + 15 \operatorname{Arctan} x \right)$$

(考え方)  $\frac{1}{(1+x^2)^n} = \frac{(x)'}{(1+x^2)^n}$  と思って部分積分を行えばよい.

- 2.\* まず, ヒントどおりに  $x^p(ax+b)^q = ax^{p+1}(ax+b)^{q-1} + bx^p(ax+b)^{q-1}$  として部分積分を行う. すると

$$I_{p,q} = \frac{x^{p+1}(ax+b)^q}{q} - \frac{p+1}{q} I_{p,q} + b I_{p,q-1}$$

を得るので, 第一の漸化式が得られる. 第2の漸化式は,  $I_{p-1,q}$  を  $(\frac{x^p}{p})'(ax+b)^q$  と思って部分積分すればよい. すると,

$$I_{p-1,q} = -\frac{aq}{p} I_{p,q-1} + \frac{x^p(ax+b)^q}{p}$$

となるので, 第一の漸化式を用いて  $I_{p,q-1}$  を  $I_{p,q}$  を使って書き換える.

3. (1)  $y = 1-x$  と変数変換すればよい. (2) 大問2を使うとよい. (1) より  $B(s, t+1) = \frac{t}{s+t} B(s, t)$  を示す.

$$B(s, t+1) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1}(1-x) dx = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{t-1} dx - \int_0^1 x^s(1-x)^{t-1} dx.$$

ここで, 2 番目の積分を  $x^s(\frac{-1}{t}(1-x)^t)'$  と思って部分積分すれば  $B(s, t+1) = B(s, t) - \frac{s}{t} B(s, t)$  を得るので, これを整理する.

- (3) 係数  $\frac{1}{2}$  が抜けていました. 変数変換  $x = \sin^2 \theta$  をすればすぐ得られる.

4.  $\frac{1}{2}\Gamma(\frac{\alpha+1}{2})$ . (求め方)  $y = x^2$  と変数変換すれば  $dy = 2x dx$  であり, 変数  $y$  の動く範囲は  $0 \rightarrow +\infty$  である. あとは単純な式変形である.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^\alpha dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} x^{\alpha-1} \cdot 2x dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-y} (y^{1/2})^{\alpha-1} dy.$$

- 5.\* 解析概論 §35 を参照のこと. 第3版では pp.116,117 にある.