

微分積分学・同演習 A

4 月 11 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$a_n := \frac{1}{n^2}$ とおく．このとき， ε - N 論法を用いて $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ を証明せよ．

証明のための準備から始める．

$$(\text{準備}) \quad \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon \Leftrightarrow n^2 > \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

(証明) ε を任意にとる．このとき， $N := \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil + 1$ ($\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ よりも真に大きい最小の整数) とすれば， $n \geq N$ のとき，

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N^2} < \varepsilon$$

より， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ である．

(補足) もちろん，この N の取り方はこれでもよい．例えば $n \geq N$ のとき $n^2 \geq n \geq N$ なので， $N_0 = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ としたとき $\frac{1}{N_0} < \varepsilon$ に注意すれば， $n \geq N_0$ のとき

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{N_0} < \varepsilon$$

なので， $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$ が示される．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

4 月 18 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ とするとき, ε - N 論法を用いて次が成り立つことを示せ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta.$$

準備. 使えるものは $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists N_1$ s.t. $|a_n - \alpha| < \varepsilon_1$ かつ $|b_n - \beta| < \varepsilon_1$.

与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $n \geq N$ ならば $|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| < \varepsilon$ を満たす N を見つけたい. 三角不等式を用いると $n \geq N_1$ のとき

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| < |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < 2\varepsilon_1$$

なので, $\varepsilon_1 = \varepsilon/2$ とすればよさそう.

証明. 任意に $\varepsilon > 0$ をとる. このとき仮定よりある番号 N_1 があって, そこから先の n については

$$|a_n - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2}$$

となる. このとき $n \geq N_1$ ならば

$$|(a_n + b_n) - (\alpha + \beta)| = |(a_n - \alpha) + (b_n - \beta)| < |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

なので, $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \alpha + \beta$ が成り立つ.

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください.

微分積分学・同演習 A

4 月 25 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次で定義される関数 $f(x)$ は、点 $x = 2$ において連続になるかどうか調べよ。

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & (x \neq 2) \\ 0 & (x = 2) \end{cases}$$

(解答例)

$x \neq 2$ のとき $f(x) = x + 2$ なので、 $f(x) \rightarrow 4$ ($x \rightarrow 2$)。しかし $f(2) = 0 \neq 4$ なので不連続。これを ε - δ 論法を使って書く： $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする。このとき、 $\delta = \varepsilon$ とおけば、 $0 < |x - 2| < \delta$ のとき $x \neq 2$ なので

$$|f(x) - 4| = \left| \frac{x^2 - 4}{x - 2} - 4 \right| = |x - 2| < \delta = \varepsilon.$$

これより $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4 \neq 0 = f(2)$ なので、 f は $x = 2$ で不連続である。

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください。

微分積分学・同演習 A

5 月 9 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

k を正の整数とする．漸化式 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{k + a_n}$ について，以下の問いに答えよ．

(1) $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列になることを示せ．

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ．

(解答例) 前回の小テストの解答例．

関数 \sqrt{x} が単調増加であることより， $\{a_n\}$ が単調増加になることは明らか． λ を方程式 $x = \sqrt{k + x}$ の解とする．すなわち， $\lambda = (1 + \sqrt{4k + 1})/2$ である．このとき任意の自然数 n に対して $a_n \leq \lambda$ となる．実際，

$$a_{n+1} = \sqrt{k + a_n} \leq \sqrt{k + \lambda} = \lambda$$

である．以上より数列 $\{a_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるので収束し，方程式 $x = \sqrt{k + x}$ の解 (で $1 \leq x \leq \lambda$ の範囲にあるもの) がその極限值になる．すなわち， $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lambda = (1 + \sqrt{4k + 1})/2$ ．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

5 月 9 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の $\text{Arctan } x$ に関する公式 (Machin^{マチン}の公式) を，以下の設問にしたがって示せ．

$$4 \text{Arctan } \frac{1}{5} - \text{Arctan } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}. \quad (1)$$

- (i) $\alpha := \text{Arctan } \frac{1}{5}$ とおく． $\tan x$ の倍角の公式を用いて $\tan 2\alpha$, $\tan 4\alpha$ を求めよ．
(ii) $\tan(\frac{\pi}{4} - 4\alpha)$ を計算せよ．
(iii) 式 (1) を示せ．

(解) $\tan \alpha = \frac{1}{5}$ なので， $\tan x$ の倍角の公式より

$$\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} = \frac{5}{12}, \quad \tan 4\alpha = \frac{2 \tan 2\alpha}{1 - \tan^2 2\alpha} = \frac{120}{119}.$$

よって $\tan x$ の加法定理より

$$\tan(\frac{\pi}{4} - 4\alpha) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan 4\alpha}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan 4\alpha} = -\frac{1}{239}.$$

さて，(ii) は

$$-\text{Arctan } \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} - 4\alpha = \frac{\pi}{4} - 4 \text{Arctan } \frac{1}{5}$$

を意味しているので，移項すれば Machin の公式を得る．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

5 月 23 日分 小テスト

学籍番号：

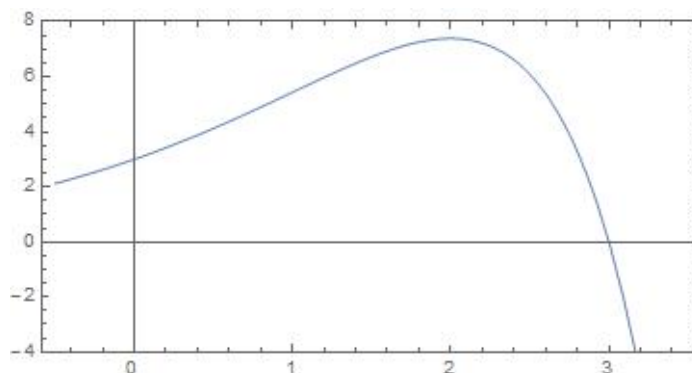
氏名：

関数 $f(x) = (3 - x)(\cosh x + \sinh x)$ の極値を求めよ．

解) 双曲線関数の定義より $\cosh x + \sinh x = e^x$ なので $f(x) = (3 - x)e^x$ である．微分すると $f'(x) = (2 - x)e^x$ なので， $f'(x) = 0$ をみたすのは $x = 2$ のみである．増減表をかけば

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'		+ 0 -	
f	0	\nearrow	$\searrow -\infty$

であるので， $x = 0$ で極大値 $f(2) = e^2$ をとる．極小値は持たない．



講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

5 月 30 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の関数の $x = 0$ における 8 次の Taylor 多項式を求めよ．

(1) $\cosh x$

(2) $\sinh x$

解) $(\cosh x)' = \sinh x$ および $(\sinh x)' = \cosh x$ より，

$$(\cosh x)^{(k)} = \begin{cases} \cosh x & (k = 2m) \\ \sinh x & (k = 2m + 1) \end{cases} \quad (\sinh x)^{(k)} = \begin{cases} \sinh x & (k = 2m) \\ \cosh x & (k = 2m + 1) \end{cases}$$

である．ただし $m = 0, 1, 2, \dots$ ．ここで $\cosh 0 = 1$ および $\sinh 0 = 0$ より

$$(\cosh x)^{(k)}|_{x=0} = \begin{cases} 1 & (k = 2m) \\ 0 & (k = 2m + 1) \end{cases} \quad (\sinh x)^{(k)}|_{x=0} = \begin{cases} 0 & (k = 2m) \\ 1 & (k = 2m + 1) \end{cases}$$

なので， $\cosh x$, $\sinh x$ の Taylor 多項式はそれぞれ以下ようになる：

$$(1) \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

$$(2) \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!}$$

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

6 月 6 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$\sin x, \cos x$ の Taylor 展開を利用して, $\tan x$ の Taylor 多項式を 5 次の項まで求めよ.
(ヒント: $\tan x$ は奇関数なので $\tan x = a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)$ とかける. ここで $\tan x \cos x = \sin x$ にそれぞれの Taylor 多項式を代入して係数比較を行う.)

解) まず $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$ および $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$ であることに注意. $\tan x \cos x$ の Taylor 展開を計算すると,

$$\begin{aligned}\tan x \cos x &= (a_1x + a_3x^3 + a_5x^5 + o(x^5)) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)\right) \\ &= a_1x + \left(\frac{a_1}{2} + a_3\right)x^3 + \left(\frac{a_1}{4!} - \frac{a_3}{3!} + a_5\right)x^5 + o(x^5)\end{aligned}$$

となる. これが $\sin x$ の Taylor 展開と等しいので, $\sin x$ の Taylor 展開と係数比較することにより,

$$a_1 = 1, \quad \frac{a_1}{2} + a_3 = -\frac{1}{6}, \quad \frac{a_1}{4!} - \frac{a_3}{3!} + a_5 = \frac{1}{5!}$$

となる. これを解けば $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}, a_5 = \frac{2}{15}$ となるので,

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

次ページに $o(x^n)$ についての解説有り.

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください.

$o(x^n)$ の計算について .

講義でも述べましたが , $o(x^n)$ は普通の関数と扱い方が異なります . イメージとしては , x^n よりも速く 0 に収束する関数をまとめて $o(x^n)$ と書くというもので , 関数というよりも , 関数群^{*1}やあるいはいっそのこと集合だと思つて理解しやすいかもしれません . なので , 先程の小テストの問題で現れた

$$o(x^5) + \frac{a_3 x^7}{4!} - \frac{a_5 x^7}{2} + \frac{a_5 x^9}{4!} + o(x^9)$$

などは , 各項はすべて x^5 よりも速く 0 に行く関数であるので , これらをまとめて

$$o(x^5)$$

と書いてしまうわけです ($o(x^5)$ に吸収される) . $o(x^5)$ という記号を用いるときに想定するのは x^5 で割ったときに $x \rightarrow 0$ とすることなので , 精度の良い項 ($o(x^{10})$ など) があっても , 比較するのは x^5 なので , それよりも精度が良くても仕方がないわけです . 大事なのは x^5 と比較したときに 0 に行くかどうかなので , x^5 と比較したときに 0 に行くものをまとめて $o(x^5)$ と書くことにするのです .

^{*1} 数学用語の群ではなく , ‘むれ’ というニュアンスで .

微分積分学・同演習 A

6 月 20 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

逆三角関数の微分を参考に，次の定積分を計算せよ．

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

解) $(\operatorname{Arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ より，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left[\operatorname{Arcsin} x \right]_0^{\frac{1}{2}} = \operatorname{Arcsin} \frac{1}{2} - \operatorname{Arcsin} 0 = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

よって，

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{6}.$$

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

6 月 27 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

有理関数 $P(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$ を部分分数分解し，その原始関数を求めよ．

解) $x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ より，

$$P(x) = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

とおける．両辺に $(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$ を掛けると

$$1 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)$$

なので，

$$\begin{aligned} x = 1 &\Rightarrow 1 = 4A && \therefore A = 1/4 \\ x = -1 &\Rightarrow 1 = -4B && \therefore B = -1/4 \\ x = i &\Rightarrow 1 = -2(Ci + D) && \therefore C = 0, D = -1/2. \end{aligned}$$

これより

$$P(x) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + 1}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \int P(x) dx &= \frac{1}{4} \left(\log |x - 1| - \log |x + 1| \right) - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

7 月 4 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の関数の原始関数を一つ求めよ．また，区間 $(0, \frac{\pi}{2}]$ における広義積分が収束するかどうかを調べ，収束するならばその値を求めよ．

$$(1) \quad \frac{1 - \cos x}{\sin x} \quad (2) \quad \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

解) 求める不定積分をそれぞれ I, J と書く．(1) $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換をすれば，

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1 - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2t}{1+t^2} dt \\ &= \log(1+t^2) = \log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \quad \left(= -2 \log \left|\cos \frac{x}{2}\right|\right). \end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos x}{\sin x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\log\left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\log\left(1 + \tan^2 \frac{\pi}{4}\right) - \log\left(1 + \tan^2 \frac{\varepsilon}{2}\right) \right) = \log 2. \end{aligned}$$

(2) $t = \tan x$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2}} \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t^2(1+t^2)} = \int \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= -\frac{1}{t} - \text{Arctan } t = -\frac{1}{\tan x} - x. \end{aligned}$$

よって，

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[-\frac{1}{\tan x} - x \right]_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} = \infty$$

となるので，この広義積分は発散する．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

7 月 18 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の広義積分は収束するか．

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

(考え方) x が十分大きいとき $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \approx \frac{1}{\sqrt[3]{x^3}} = \frac{1}{x^1}$ なので、この積分は発散していると予測できる．よって、 $g_m(x) \leq f(x)$ を満たす関数 $g_m(x)$ で広義積分が発散するものを探せばよい．

解) 発散する．実際、 $x > 0$ のとき $0 < x^3 + 1 \leq (x+1)^3$ 、つまり $0 < \sqrt[3]{x^3+1} \leq \sqrt[3]{(x+1)^3} = x+1$ なので、

$$0 < \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}}$$

である．これより

$$\int_0^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq \int_0^R \frac{dx}{x+1} = \log R \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} +\infty.$$

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください．

微分積分学・同演習 A

7 月 25 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の広義積分の計算結果は正しいか．その理由を述べよ．

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 4$$

解) 正しい．積分区間に不連続点 $x = 0$ があるが，そこで分割すると

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

どちらも被積分関数が $\frac{1}{x^{1/2}}$ なので収束する (前者は変数変換 $y = -x$ をする)．また，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{-x}} = 2$$

であるので，問題の等式は正しい．

(注意) 被積分関数は積分区間の中で常に正である関数なので，その広義積分の値は常に正になります ($+\infty$ になる可能性はありますが)．よって計算結果が 0 や負になった場合はどこかで計算ミスをしているということになります．この問題では被積分関数に $\frac{1}{\sqrt{-x}}$ が出てきますが，こうした扱いにくい場合 (根号の中にマイナスの記号がある) は変数変換を用いて少しでも扱いやすく変形すべきです．そのまま計算すると，気付かぬうちに計算ミスをしてしまいます．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．