

演習問題 1

問題 1 教科書 p.124 の命題 6.2 を参照のこと .

問題 2 (1) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ は存在しない, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = 1$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = -1$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ は存在しない, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = 1$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 1$

(3) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ および $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$ は存在しない, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$

(4) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y) = 0$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y) = 0$

(解説) $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x,y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x,y)$ は順次極限を取って計算すればよい . この 2 つのいずれかが存在しない , または一致していなければ $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ が存在しないことがわかる . しかし , 一致していたとしても , $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ が収束しているとは限らないことに注意 (問題 (2) 参照) . この場合は , 例えば極座標変換を用いて考えるとよい .

問題 3 (1) 存在しない . (2) 0

(解説) 極座標変換すればすぐわかる . いずれも分子・分母ともに同次式なので考えやすい .

問題 4 (1) , (2) とともに $(x,y) = (0,0)$ で連続

(解説) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = f(0,0)$ かどうかを調べる . 極座標変換をすれば極限の計算が容易になる .

問題 5 (1) $f_x(x,y) = 2\sqrt{2}xe^{-x^2-y^2} \sin(x^2 + y^2 + \frac{3\pi}{4})$,

$$f_y(x,y) = 2\sqrt{2}ye^{-x^2-y^2} \sin(x^2 + y^2 + \frac{3\pi}{4})$$

$$(2) g_x(x,y) = x^y y^x (y/x + \log y), \quad g_y(x,y) = x^y y^x (x/y + \log x)$$

$$(3) h_x(x,y) = \frac{2x-y}{x^2+y^2-xy}, \quad h_y(x,y) = \frac{2y-x}{x^2+y^2-xy}$$

(解説) 実質的には 1 変数関数の微分なので , 特に解説することなし .

問題 6 (1) $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$

(2) 原点において x, y に関する偏微分はどちらも存在しない

$$(3) f_x(0,0) = 0, f_y(0,0) = 0$$

(解説) 原点が特異である場合は , 定義に従って計算する必要がある . 例えば (2) の $f_x(0,0)$ は

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \begin{cases} 1 & (h \rightarrow +0) \\ -1 & (h \rightarrow -0) \end{cases}$$

なので , 原点において x に関する偏微分は存在しない . 他の場合も同様に確認できる .

小レポート 1

(1) 各関数の原点における Taylor 展開の最初の 4 項は次の通り .

$$\begin{aligned}
 e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} &&= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) \\
 \sin x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1} &&= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7) \\
 \cos x &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} &&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^6) \\
 \log(1+x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n &&= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4) \\
 \operatorname{Arctan} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} &&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\
 \operatorname{Arcsin} x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} &&= x + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{x^7}{7} + o(x^7) \\
 (1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n &&= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{6} x^3 + o(x^3)
 \end{aligned}$$

コメント . これらの Taylor 展開は基本的なものになります . 公式から導くことももちろん可能ですが , 覚えておきましょう .

(2) (i) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f_x(x, y) = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$, $f_y(x, y) = \frac{x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. また , $(x, y) = (0, 0)$ のときは講義で説明したように $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$.

(ii) $\lim_{h \rightarrow 0} f(h, h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot h}{h^2 + h^2} = \frac{1}{2}$. (iii) $\lim_{h \rightarrow 0} f(h, -h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \cdot (-h)}{h^2 + (-h)^2} = -\frac{1}{2}$.

コメント . 偏微分は , 他の変数を定数と思って微分するものです . (i) の原点のように , ある点で関数値が別で定義されている場合は場合を分けて考える必要が有ることも , 1 変数の微分と同様です . (ii), (iii) はそれぞれ直線 $y = x$, $y = -x$ に沿って原点に近づくときの関数の極限を表しています . このように , 多変数になると近づけ方によってその極限が変わってしまうという現象が現れるようになります . 「全微分可能」はこのような現象が起きないための条件であると解釈することができます .

演習問題 2

問題 1. (1) 全微分可能 (2) 全微分可能でない

(考え方) 偏微分を計算してそのすべてが連続ならば全微分可能である。また、元の関数が連続でなければ全微分ではない(「全微分ならば連続」の対偶)。

問題 2. まず定義に従って $f_x(0, 0)$ および $f_y(0, 0)$ を計算する。

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \sin \frac{1}{h^2} = 0.$$

同様に $f_y(0, 0) = 0$ 。よって関数 f の接平面 (の候補) は xy 平面以外にはありえないが ($z = f(0, 0) + f_x(0, 0)(x - 0) + f_y(0, 0)(y - 0) = 0$)、このとき

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{|f(x, y) - 0|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0$$

であるので、関数 $f(x, y)$ は全微分可能である。一方で $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき

$$f_x(x, y) = 2x \left(\sin \frac{1}{x^2 + y^2} - \frac{1}{x^2 + y^2} \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

であり、 x 軸に沿った極限を考えると

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_x(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2x}{x^2} \cos \frac{1}{x^2} \right)$$

であるが、第 2 項が発散するので、 f_x は $x = 0$ で連続でない。 f_y についても同様。

問題 3.[†] (1) $z = -3x - 3y$ (2) $z = 1$ (3) $z = 1$

(考え方) 偏微分を計算し、連続であることを確認する。分母にある関数が考える点において零にならなければよい。接平面は公式を適用する。

(1) $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$ より連続なので全微分可能。またこれより接平面は $z = 0 - 3x - 3y$ となる。(2) $g_x = -x(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}$, $g_y = -y(1 - x^2 - y^2)^{-1/2}$ より、これらの関数は原点で連続ゆえ全微分可能である。またこれより接平面は $z = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot y$ となる。(3) $h_x = x(1 - x^2 - y^2)^{-3/2}$, $h_y = y(1 - x^2 - y^2)^{-3/2}$ より、これらの関数は原点で連続ゆえ全微分可能である。またこれより接平面は $z = 1 + 0 \cdot x + 0 \cdot y$ となる。

問題 4.[†] (1) $\nabla f(x) = (3x^2 - 3, 3y^3 - 3)$, $f_{xx} = 6x$, $f_{xy} = f_{yx} = 0$, $f_{yy} = 6y$.

$$(2) \nabla g(x) = \left(-\frac{y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right),$$

$$g_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, g_{xy} = g_{yx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, g_{yy} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

$$(3) \nabla h(\boldsymbol{x}) = \left(\frac{-y^3}{(x^2 - y^2)^{3/2}}, \frac{x^3}{(x^2 - y^2)^{3/2}} \right),$$

$$h_{xx} = \frac{3xy^3}{(x^2 - y^2)^{5/2}}, h_{xy} = \frac{-3x^2y^2}{(x^2 - y^2)^{5/2}}, h_{yy} = \frac{3x^3y}{(x^2 - y^2)^{5/2}}$$

(考え方) 定義に従って計算するだけ .

問題 5.* $f_{xy}(0,0) = -1, f_{yx}(0,0) = 1$. これより特に , 一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ がわかる .
 まず $(x,y) \neq (0,0)$ のとき

$$f_x(x,y) = \frac{x^4y - y^5 + 4x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad f_y(x,y) = \frac{x^5 - 4x^3y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2}$$

である . $(x,y) = (0,0)$ のときは場合分けが必要で , この場合は定義より

$$f_x(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0, \quad f_y(0,0) = 0.$$

これらを用いて $f_{xy}(0,0), f_{yx}(0,0)$ を計算する .

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_x(0,h) - f_x(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{0 - h^5 + 0}{h^4} = -1,$$

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \cdot \frac{h^5 - 0 - 0}{h^4} = 1.$$

小レポート 2

(1) 与えられた関数の n 階導関数は次の通り .

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(n + \frac{n\pi}{2}\right), \quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}, \quad (e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x},$$

$$(e^x \sin x)^{(n)} = (\sqrt{2})^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right), \quad (\sin^3 x)^{(n)} = \frac{3}{4} \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) - \frac{3^n}{4} \sin\left(3x + \frac{n\pi}{2}\right).$$

コメント . n 階導関数の計算に対する一般の公式はありません . 基本的なもの $((x^m)^{(n)} = n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{m-n}$ や $(e^x)^{(n)} = e^x$, そして $\sin x$ や $\cos x$ など) と合成関数の微分 , Leibniz の公式で分かる場合はよいですが , そうでないならば $n = 3$ くらいまで計算して当たりをつけ , 帰納法に持ち込むとうまくいくことも多いです .

(2) (i) 偏導関数が連続であることを確認する . $f_x(x, y) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$, $f_y(x, y) = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ であるが , これらの関数の分母は考えている領域 $x^2 + y^2 < 1$ では決して 0 にならないので , (連続関数同士の合成はまた連続関数になることより) 連続になる . したがって $f(x, y)$ は全微分可能である . (ii) $\frac{y^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$, $\frac{x^2-1}{(1-x^2-y^2)^{3/2}}$. (iii) 公式 $z = f(\mathbf{a}) + f_x(\mathbf{a})(x-a) + f_y(\mathbf{a})(y-b)$ を用いると

$$z = \sqrt{1-a^2-b^2} - \frac{a(x-a)}{\sqrt{1-a^2-b^2}} - \frac{b(y-b)}{\sqrt{1-a^2-b^2}} = \frac{1-ax-by}{\sqrt{1-a^2-b^2}}$$

コメント . 高階偏微分は , 各ステップでの計算はただの 1 変数の微分なので , 丁寧に計算すれば間違えることはありません . ただし 2 変数関数の n 階偏導関数は , なめらかならば $f_{xy} = f_{yx}$ によって $n+1$ 個存在しますが , 一般には 2^n 個だけ存在することには注意が必要です .

演習問題 3

問題 1. (1) 本質的に例題 3.8 と同じであるが, より実際のな解答をする. $z_x = z_r r_x + z_\theta \theta_x$,
 $z_y = z_r r_y + z_\theta \theta_y$ より,

$$\begin{aligned} z_x^2 + z_y^2 &= (z_r r_x + z_\theta \theta_x)^2 + (z_r r_y + z_\theta \theta_y)^2 \\ &= (r_x^2 + r_y^2) z_r^2 + 2(r_x \theta_x + r_y \theta_y) z_r z_\theta + (\theta_x^2 + \theta_y^2) z_\theta^2. \end{aligned}$$

ここで $r_x = \cos \theta$, $r_y = \sin \theta$, $\theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}$, $\theta_y = \frac{\cos \theta}{r}$ より

$$r_x^2 + r_y^2 = 1, \quad z_r r_x + z_\theta \theta_x = 0, \quad \theta_x^2 + \theta_y^2 = \frac{1}{r^2}$$

であるので, $z_x^2 + z_y^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2$ を得る.

ベクトル表記 $\nabla r = (r_x, r_y)$ および $\nabla \theta = (\theta_x, \theta_y)$ を用いると, もっと見易くなる.

実際, $\|\nabla r\|^2 = 1$, $\langle \nabla r | \nabla \theta \rangle = 0$, $\|\nabla \theta\|^2 = \frac{1}{r^2}$ となるので,

$$z_x^2 + z_y^2 = \|\nabla r\|^2 z_r^2 + 2\langle \nabla r | \nabla \theta \rangle z_r z_\theta + \|\nabla \theta\|^2 z_\theta^2 = z_r^2 + \frac{1}{r^2} z_\theta^2.$$

(2) まず z_{xx} について計算する. 計算のコツは, r_x や θ_x などが出てきても $r_x = \cos \theta$ などとせずそのまま計算を実行することである.

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_r r_x + z_\theta \theta_x)_x \\ &= \{(z_r)_x r_x + z_r (r_x)_x\} + \{(z_\theta)_x \theta_x + z_\theta (\theta_x)_x\} \\ &= \{z_{rr} r_x + z_{r\theta} \theta_x\} r_x + z_r r_{xx} + \{(z_\theta r)_x + z_{\theta\theta} \theta_x\} \theta_x + z_\theta \theta_{xx} \\ &= r_x^2 z_{rr} + 2r_x \theta_x r_{r\theta} + \theta_x^2 z_{\theta\theta} + z_r r_{xx} + z_\theta \theta_{xx}. \end{aligned}$$

次に z_{yy} についても計算するが, これは z_{xx} の計算において, 単に x を y に書き換えればよい (これがそのまま計算することの利点である). よって,

$$z_{yy} = r_y^2 z_{rr} + 2r_y \theta_y r_{r\theta} + \theta_y^2 z_{\theta\theta} + z_r r_{yy} + z_\theta \theta_{yy}.$$

以上より

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} &= (r_x^2 + r_y^2) z_{rr} + 2(r_x \theta_x + r_y \theta_y) r_{r\theta} + (\theta_x^2 + \theta_y^2) z_{\theta\theta} \\ &\quad + (r_{xx} + r_{yy}) z_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy}) z_\theta \end{aligned}$$

となるので, あとは $r_{xx} + r_{yy}$ と $\theta_{xx} + \theta_{yy}$ を計算すればよい. $r^2 = x^2 + y^2$ において両辺を x で偏微分して $r \cdot r_x = x$ で, これをさらに x で偏微分すれば

$$r_x \cdot r_x + r \cdot r_{xx} = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad r_{xx} = \frac{1 - \frac{x^2}{r^2}}{r} = \frac{\sin^2 \theta}{r}.$$

同様にして $r_{yy} = \frac{\cos^2 \theta}{r}$. θ に関しては $\theta = \text{Arctan } \frac{y}{x}$ を偏微分する方がよい .

$$\theta_{xx} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}, \quad \theta_{yy} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2 \sin \theta \cos \theta}{r^2}.$$

したがって , $r_{xx} + r_{yy} = \frac{1}{r}$, $\theta_{xx} + \theta_{yy} = 0$ なので ,

$$z_{xx} + z_{yy} = z_{rr} + \frac{1}{r^2} z_{\theta\theta} + \frac{1}{r} z_r.$$

問題 2. (1) まず $\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha$, $\eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha$ に注意する . これより

$$\xi_x = \cos \alpha, \quad \xi_y = \sin \alpha, \quad \eta_x = -\sin \alpha, \quad \eta_y = \cos \alpha$$

となる . またこれらの二階偏導関数は 0 になる . さて ,

$$\begin{aligned} z_x &= z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x = (\cos \alpha) z_\xi + (-\sin \alpha) z_\eta, \\ z_y &= z_\xi \xi_y + z_\eta \eta_y = (\sin \alpha) z_\xi + (\cos \alpha) z_\eta \end{aligned}$$

であるので ,

$$z_x^2 + z_y^2 = \{(\cos \alpha) z_\xi + (-\sin \alpha) z_\eta\}^2 + \{(\sin \alpha) z_\xi + (\cos \alpha) z_\eta\}^2 = z_\xi^2 + z_\eta^2.$$

(2) まず z_{xx} について計算する . ξ , η の二階偏導関数が 0 になることを思い出して ,

$$\begin{aligned} z_{xx} &= (z_\xi \xi_x + z_\eta \eta_x)_x \\ &= \{(z_\xi)_x \xi_x + z_\xi \xi_{xx}\} + \{(z_\eta)_x \eta_x + z_\eta \eta_{xx}\} \\ &= (z_{\xi\xi} \xi_x + z_{\xi\eta} \eta_x) \xi_x + (z_{\eta\xi} \xi_x + z_{\eta\eta} \eta_x) \eta_x \\ &= (\xi_x)^2 z_{\xi\xi} + 2\xi_x \eta_x z_{\xi\eta} + (\eta_x)^2 z_{\eta\eta}. \end{aligned}$$

z_{yy} は x を y に置き換えたものなので , $z_{yy} = (\xi_y)^2 z_{\xi\xi} + 2\xi_y \eta_y z_{\xi\eta} + (\eta_y)^2 z_{\eta\eta}$ となる .

また , $\xi_x^2 + \xi_y^2 = 1$, $\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = 0$, $\eta_x^2 + \eta_y^2 = 1$ となるので $z_{xx} + z_{yy} = z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}$.

問題 3.† 問題 1(2) の解答より (記号を $r \mapsto u$, $\theta \mapsto v$ とすれば)

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} &= (u_x^2 + u_y^2) z_{uu} + 2(u_x v_x + u_y v_y) u_{uv} + (v_x^2 + v_y^2) z_{vv} \\ &\quad + (u_{xx} + u_{yy}) z_u + (v_{xx} + v_{yy}) z_v \end{aligned}$$

となることを利用する . 簡単な計算より $u = \frac{1}{2} \log(x^2 + y^2)$, $\tan v = \frac{y}{x}$ と書ける .

これより v については改めて計算する必要はない (問題 1 の θ と同じ変換になるの

で) . u については , $u_x = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $u_y = \frac{y}{x^2 + y^2}$ であり , さらに

$$u_{xx} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad u_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

なので ,

$$u_x^2 + u_y^2 = \frac{1}{x^2 + y^2} = e^{-2u}, \quad u_x v_x + u_y v_y = 0, \quad u_{xx} + u_{yy} = 0$$

となり , $z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u} (z_{uu} + z_{vv})$ を得る .

問題 4. 重大な誤植がありました．示すべき等式は

$$z_{uu} + z_{vv} = \frac{\cosh 2u - \cos 2v}{2}(z_{xx} + z_{yy})$$

です．問題 1(2) の解答より (記号を $x \mapsto u$, $y \mapsto v$, $r \mapsto x$, $\theta \mapsto y$ とすれば)

$$\begin{aligned} z_{uu} + z_{vv} = & (x_u^2 + x_v^2)z_{xx} + 2(x_u y_u + x_v y_v)u_{xy} + (y_u^2 + y_v^2)z_{yy} \\ & + (x_{uu} + x_{vv})z_x + (y_{uu} + y_{vv})z_y \end{aligned}$$

となることを利用する．この問題は u_x , u_y などを求めるのが少し難しいため，右辺から出発して示す．まず

$$x_u = \sinh u \cos v, \quad x_v = -\cosh u \sin v, \quad y_u = \cosh u \sin v, \quad y_v = \sinh u \cos v$$

および

$$\begin{aligned} x_{uu} = \cosh u \cos v, \quad x_{uv} = x_{vu} = -\sinh u \sin v, \quad x_{vv} = -\cosh u \cos v, \\ y_{uu} = \sinh u \sin v, \quad y_{uv} = y_{vu} = \cosh u \cos v, \quad y_{vv} = -\sinh u \sin v \end{aligned}$$

である．よって

$$x_u^2 + x_v^2 = y_u^2 + y_v^2 = \sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v,$$

$$x_u y_u + x_v y_v = x_{uu} + x_{vv} = y_{uu} + y_{vv} = 0$$

となり， $z_{uu} + z_{vv} = (\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v)(z_{xx} + z_{yy})$ となることが分かる．ここで三角関数，双曲線関数の性質 (倍角の公式) を使えば

$$\sinh^2 u \cos^2 v + \cosh^2 u \sin^2 v = \frac{\cosh 2u - \cos 2v}{2}$$

がわかり証明が終わる．

問題 5.[†] 問題 1 (2) の証明より

$$\begin{aligned} z_{xx} + z_{yy} = & (\xi_x^2 + \xi_y^2)z_{\xi\xi} + 2(\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y)z_{\xi\eta} + (\eta_x^2 + \eta_y^2)z_{\eta\eta} \\ & + (\xi_{xx} + \xi_{yy})z_\xi + (\eta_{xx} + \eta_{yy})z_\eta \end{aligned}$$

である．また，簡単な計算から $\xi = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\eta = \frac{y}{x^2+y^2}$ である．よって

$$\xi_x = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \xi_y = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \eta_x = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \eta_y = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

および

$$\xi_{xx} = \frac{2x(x^2 - 3y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \xi_{yy} = \frac{2x(3y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \eta_{xx} = \frac{2y(3x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^3}, \quad \eta_{yy} = \frac{2y(y^2 - 3x^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

である．したがって

$$\xi_x^2 + \xi_y^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \eta_x^2 + \eta_y^2 = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2}$$
$$\xi_x \eta_x + \xi_y \eta_y = \xi_{xx} + \xi_{yy} = \eta_{xx} + \eta_{yy} = 0$$

であり , $\frac{1}{x^2+y^2} = \xi^2 + \eta^2$ であることを思い出せば ,

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{\xi^2 + \eta^2}{x^2 + y^2} (z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}) \quad \Leftrightarrow \quad (x^2 + y^2)(z_{xx} + z_{yy}) = (\xi^2 + \eta^2)(z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}).$$

小レポート 3

(1) 問題が「原始関数を一つ求めよ」なので、積分定数は書かなくてもよいです。また、 $\int \frac{dt}{t} = \log |t|$ のように、積分して \log になるときは絶対値を書く必要がありますので、気をつけましょう。

- $f_1(x) = \frac{1}{\sin x}$
三角関数の有理関数の積分は、 $t = \tan \frac{x}{2}$ と変数変換すれば機械的に計算ができる^{*1}。
このとき $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ であり、また $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ である。これより、

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{1+t^2}{2t} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{dt}{t} = \log |t| = \log \left| \tan \frac{x}{2} \right|. \quad \square$$

- $f_2(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x}$
 $f_1(x)$ の場合と同様に変数変換すれば、

$$\int \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} dx = \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = -2 \int \frac{t^2 + 2t - 1}{(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 1)} dt.$$

ここで部分分数分解する。

$$\frac{t^2 + 2t - 1}{(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{at + b}{t^2 - 2t - 1} + \frac{ct + d}{t^2 + 1}$$

とおき、この両辺に $(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 1)$ を掛けて

$$\begin{aligned} t^2 + 2t - 1 &= (at + b)(t^2 + 1) + (ct + d)(t^2 - 2t - 1) \\ &= (a + c)t^3 + (b - 2c + d)t^2 + (a - c - 2d)t + (b - d) \end{aligned}$$

となる。これより

$$a + c = 0, \quad b - 2c + d = 1, \quad a - c - 2d = 2, \quad b - d = -1$$

であり、これを解いて $a = 1, b = c = -1, d = 0$ を得る。したがって

$$-2 \frac{t^2 + 2t - 1}{(t^2 - 2t - 1)(t^2 + 1)} = \frac{2t}{t^2 + 1} - \frac{2t - 2}{t^2 - 2t - 1}$$

なので、

$$\begin{aligned} I &= \int \left\{ \frac{2t}{t^2 + 1} - \frac{2t - 2}{t^2 - 2t - 1} \right\} dt = \log(t^2 + 1) - \log |t^2 - 2t - 1| \\ &= \log \left| \frac{1 + t^2}{t^2 - 2t - 1} \right|. \end{aligned}$$

^{*1} ただし、必ずしも計算が楽というわけではない。

ここで $1 + t^2 = (\cos^2 \frac{x}{2})^{-1}$ および

$$t^2 - 2t - 1 = \frac{\sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{-\cos x - \sin x}{\cos^2 \frac{x}{2}}$$

であることに注意すれば,

$$I = \log \left| \frac{1 + \tan^2 \frac{x}{2}}{\tan^2 \frac{x}{2} - 2 \tan \frac{x}{2} - 1} \right| = -\log |\cos x + \sin x|. \quad \square$$

- $f_3(x) = \frac{1}{1 + \tan x}$
被積分関数が $\tan x$ や $\cos^2 x$, $\sin^2 x$ による有理関数になっているならば, $t = \tan x$ と変数変換するとよい. この場合, $dt = \frac{dt}{1 + t^2}$ および $\sin^2 x = \frac{t^2}{1 + t^2}$, $\cos^2 x = \frac{1}{1 + t^2}$ であることより,

$$\int \frac{dx}{1 + \tan x} = \int \frac{1}{1 + t} \cdot \frac{dt}{1 + t^2}.$$

ここで部分分数分解を行う.

$$\frac{1}{(1 + t)(1 + t^2)} = \frac{a}{1 + t} + \frac{bt + c}{t^2 + 1}$$

とおいて, 両辺に $(1 + t)(1 + t^2)$ を掛けると

$$1 = a(1 + t^2) + (bt + c)(1 + t) = (a + b)t^2 + (b + c)t + (a + c)$$

なので $a + b = 0$, $b + c = 0$, $a + c = 1$ となる. これを解いて $a = c = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ を得る. したがって

$$\frac{1}{(1 + t)(1 + t^2)} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{1 + t} - \frac{t - 1}{t^2 + 1} \right\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + t} - \frac{1}{4} \cdot \frac{2t}{1 + t^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 + t^2}$$

なので,

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \log |1 + t| - \frac{1}{4} \log(1 + t^2) + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t \\ &= \frac{1}{4} \log \frac{(1 + t)^2}{1 + t^2} + \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} t \\ &= \frac{1}{2} \log |\sin x + \cos x| + \frac{1}{2} x. \quad \square \end{aligned}$$

- $f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
 $f_3(x)$ と同様にすれば $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{1 + t^2}{1} \cdot \frac{dt}{1 + t^2} = \int dt = t = \tan x. \quad \square$
- 別解もあります.

- ▶ $f_1(x) = \frac{\sin x}{\sin^2 x} = -\frac{(\cos x)'}{1 - \cos^2 x}$ とみる .
- ▶ $f_2(x) = -\frac{(\sin x + \cos x)'}{\sin x + \cos x}$ とみる .
- ▶ あるいは , $f_2(x) = \frac{\sqrt{2} \sin(x - \frac{\pi}{4})}{\sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4})} = \frac{(\cos(x - \frac{\pi}{4}))'}{\cos(x - \frac{\pi}{4})}$ とみる^{*2} .
- ▶ $f_3(x) = \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\sin x + \cos x}{\sin x + \cos x} - \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x} \right\}$ とみて , $f_2(x)$ の結果を使う^{*3} .
- ▶ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = f_4(x)$ よりすぐ分かる .

(2) は演習問題 3 の問題 1 (2) を参照してください (実は同じ問題です) .

^{*2} このように解答した方が数名いました .

^{*3} 私は気が付きませんでした , このよう解答した方がいました .

演習問題 4

問題 1.[†] (1) $J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad \det J_F(\mathbf{x}) = 1.$

(2) $J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix}, \quad \det J_F(\mathbf{x}) = e^{2x}.$

(3) $J_F(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & -\cosh x \sin y \\ \cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix}, \quad \det J_F(\mathbf{x}) = \sinh^2 x + \sin^2 y.$

(4) $J_F(\mathbf{x}) = \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad \det J_F(\mathbf{x}) = \frac{-1}{(x^2 + y^2)^2}.$

定義に従って計算するだけです.

問題 2.[†] $\mathbf{u} = F(\mathbf{x})$ とすると

(1) $J_{F^{-1}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix},$

(2) $J_{F^{-1}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} e^{-x} \cos y & e^{-x} \sin y \\ -e^{-x} \sin y & e^{-x} \cos y \end{pmatrix} = \frac{1}{u^2 + v^2} \begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix},$

(3) $J_{F^{-1}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{\sinh^2 x + \sin^2 y} \begin{pmatrix} \sinh x \cos y & \cosh x \sin y \\ -\cosh x \sin y & \sinh x \cos y \end{pmatrix},$

(4) $J_{F^{-1}}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} y^2 - x^2 & -2xy \\ -2xy & x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \frac{1}{(u^2 + v^2)^2} \begin{pmatrix} v^2 - u^2 & -2uv \\ -2uv & u^2 - v^2 \end{pmatrix}.$

問題 1 で求めたものの逆行列を考えても, 直接逆変換を作って Jacobi 行列を計算しても良いです. ただし, (3) は \mathbf{u} で書くのは難しいです. そのような場合でも Jacobian が (\mathbf{x}) でになります(が) 計算できる点が前者の計算法のメリットになります.

問題 3. $J_F(\mathbf{x}) = {}^t A, \det J_F(\mathbf{x}) = \det A.$

問題 4.* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば, この変換で得られる平行四辺形はベクトル $\overrightarrow{OP} = (a, b), \overrightarrow{OQ} = (c, d)$ を辺とするものである. よって求める面積は三角形 OPQ の面積の 2 倍であるが, 三角形の面積の公式 $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \sin \theta$ (θ は 2 ベクトルのなす角) であることと, 内積は角度の情報を持つこと ($\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cos \theta$) より,

$$2S = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{|\overrightarrow{OP}|^2 |\overrightarrow{OQ}|^2 - (\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ})^2} = |ad - bc|.$$

問題 5.* $A = (a, b, c)$ とする. 平行六面体の体積は, 3 本のベクトル a, b, c を辺とする三角錐の体積の 6 倍であるので, まずはこの三角錐の体積を求める. 三角錐の体

積は「底面積 \times 高さ $\div 3$ 」である．さて，2 ベクトル a, b の張る三角形の面積は $\frac{1}{2} \|a\| \cdot \|b\| \sin \theta$ であるが，これを $\frac{1}{2} \|a \times b\|$ と見る．次に高さであるが，これはベクトル c の， a, b とは垂直な方向 ($=a \times b$ の方向) の成分の長さとも一致する．これは，内積を用いて $\left| c \cdot \left(\frac{a \times b}{\|a \times b\|} \right) \right|$ と表せる．したがって三角錐の体積は $\frac{1}{2} \|a \times b\| \cdot \left| c \cdot \left(\frac{a \times b}{\|a \times b\|} \right) \right| \div 3 = \frac{1}{6} |c \cdot (a \times b)|$ となる．成分表示して計算すれば，これが $\det A/6$ と一致していることが分かる．

小レポート 4

(1) 積分の計算です .

• $f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $\text{Arctan } x$ の微分が $\frac{1}{x^2+1}$ なので , $\int f_1(x) dx = \text{Arctan } x$. □

• $f_2(x) = \frac{2x}{x^2+1}$;
 $\int \frac{f'_2(x)}{f_2(x)} dx = \log |f_2(x)|$ を使うと , $\int f_2(x) dx = \int \frac{(x^2+1)'}{x^2+1} dx = \log(x^2+1)$. □

• $f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $\text{Arcsin } x$ の微分が $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ なので , $\int f_3(x) dx = \text{Arcsin } x$. □

• $f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; 「 $\sqrt{x^2-1}$ 」が入っている積分は $u = \sqrt{x^2-1} + x$ とおいて計算するのがよい^{*1} . このとき , $du = \frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} dx$ より $\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{du}{u}$ なので ,

$$\int f_4(x) dx = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int \frac{du}{u} = \log |u| = \log |\sqrt{x^2-1} + x|. \quad \square$$

(2) (i) 極座標変換 $F: x = r \sin \theta \cos \varphi, y = r \sin \theta \sin \varphi, z = r \cos \theta$ の Jacobi 行列は

$$J_F(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Jacobian は上の行列の行列式なので , 全展開式より $\det J_F(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$. □

(ii) (i) の逆行列 $(J_F(r, \theta, \varphi))^{-1}$ を計算すると ,

$$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \begin{pmatrix} r^2 \sin^2 \theta \cos \varphi & r^2 \sin^2 \theta \sin \varphi & r^2 \cos \theta \sin \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ r \sin \theta \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \theta \sin \varphi & -r \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ -r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sin \varphi & r(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \cos \varphi & 0 \end{pmatrix}$$

なので ,

$$(J_F(r, \theta, \varphi))^{-1} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} & -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} & -\frac{\sin \theta}{r} \\ -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} & \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} & 0 \end{pmatrix}.$$

これを x, y, z で表すと , 次のようになる .

$$\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

^{*1} もちろん , $s = \sqrt{x^2-1}$ においても計算できる . あるいは $c = \cosh x$ とおくのがよいかもしれない .

ここでは、以下の関係式を用いた。

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \theta = \frac{z}{r}, \quad \sin \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r}, \\ \cos \varphi &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \end{aligned}$$

演習問題 5

問題 1. (1) $(x+y) + (-\frac{y^2}{2} + xy) + (\frac{y^3}{3} - \frac{xy^2}{2} + \frac{x^2y}{2}) + (-\frac{y^4}{4} + \frac{xy^3}{3} - \frac{x^2y^2}{4} + \frac{x^3y}{6}) + o$

(2) 問題で誤植がありました．誤: $e^{2x} \cos x$, 正: $e^{2x} \cos y$.

$1 + 2x - (\frac{y^2}{2} + 2x^2) + (-xy^2 + \frac{4}{3}x^3) + (\frac{y^4}{24} - x^2y^2 + \frac{2}{3}x^4) + o$

(3) $1 - \frac{1}{2}(x^2 + yr) - \frac{1}{8}(x^4 + 2x^2y^2 + y^4) + o$

(4) $x - \frac{xy^2}{2} - \frac{x^3}{6} + o$

(考え方) いずれも 1 変数の関数の Taylor 展開を利用する . (1),(2),(4) はそれぞれを Taylor 展開した後 , 普通の多項式と思って 5 次以下の部分を書き出せばよい .

(3) は $X = x^2 + y^2$ とおき , X の関数と思って Taylor 展開した後で X を元に戻す .

問題 2.[†] (1) 停留点は $(0,0)$, (a,a) , $H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x & -3a \\ -3a & 6y \end{pmatrix}$, $\det H_f(x) = 9(4xy - a^2)$.

(2) 停留点は $(1,0)$ のひとつのみ, $H_f(x) = \begin{pmatrix} y(y-1)x^{y-2} & x^{y-1}(1+y \log x) \\ x^{y-1}(1+y \log x) & x^y(\log x)^2 \end{pmatrix}$,
 $\det H_f(x) = -x^{2y-2}(1+2y \log x + y(\log x)^2)$

(3) 出題ミスです . グラフを描かせてみたところ , 非常に多くの極値を持っていました . 参考までにウェブページに上げておきます .

(4) 停留点を持たない . $H_f(x) = \frac{3xy}{(x^2+y^2)^{5/2}} \begin{pmatrix} -y^2 & xy \\ xy & -x^2 \end{pmatrix}$, $\det H_f(x) = 0$.

(1) $f_x = 3x^2 - 3ay$, $f_y = 3y^2 - 3ax$. a に関して場合分けが必要 . $f_x = f_y = 0$ とすると (いずれの場合も) $(x,y) = (0,0), (a,a)$ を得る . a の正負に応じて極大か極小かが変わってくることに注意 . (2) 煩雑だが計算するだけ . この点は鞍点になる .

(4) $f_x = f_y = 0$ を解くと $x = y = 0$ が出てくるが , この関数は原点において定義されていない . また , もし連続になるように原点での値を決めたとしても , 原点において微分可能ではないので , やはりこの点は停留点にはなれない .

問題 3. (1) 点 $(2,0)$ で極小値 -4 をとる . (2) 点 $(0,0)$ で極小値 0 をとり , 点 $\pm(1,0)$ で極大値 $2/e$ をとる . また , 点 $\pm(0,1)$ で鞍点をとる . (3) 点 $(2,2)$ で極小値 12 をとる . (4) 点 $(-\pi/2, -\pi/2)$ で極小値 -3 , 点 $(\pi/6, \pi/6)$, $(5\pi/6, 5\pi/6)$ で極大値 $3/2$, 点 $(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/2, -\pi/2)$, $(-\pi/2, \pi/2)$ で鞍点をとる . (5) 点 $(1,1)$ で極小値 9 をとる .

(2) 計算は煩雑だが , ちゃんと計算できる . $f_x = -2x(2x^2 + y^2 - 2)e^{-x^2-y^2}$, $f_y = -2y(2x^2 + y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}$ なので , 停留点は $(0,0)$, $\pm(1,0)$, $\pm(0,1)$ の 5 個 (図を描くと分かりやすくなる) . また Hesse 行列は次のようになるので , 極値の判定

もできる .

$$H_f(x) = 2e^{-x^2-y^2} \begin{pmatrix} 4x^4 + 2x^2y^2 - 10x^2 - y^2 + 2 & 2xy(2x^2 + xy - 2) \\ 2xy(2x^2 + xy - 2) & 4x^2y^2 + y^4 - 5y^2 - 2x^2 + 1 \end{pmatrix}.$$

(3) 計算するだけ . 候補として $x = 0$ が出てくるが , これは関数が定義できないので不適である .

(4) $f_x = \cos x - \sin(x+y)$, $f_y = \cos y - \sin(x+y)$ である . $\cos x = \cos y$ なので , $x = y$ か $x = -y$ かで場合分けを行う . 停留点は $\pm(\pi/2, \pi/2)$, $(\pi/6, \pi/6)$, $(5\pi/6, 5\pi/6)$ および $\pm(\pi/2, -\pi/2)$ の 6 個 . Hesse 行列は

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} -\sin x - \cos(x+y) & -\cos(x+y) \\ -\cos(x+y) & -\sin y - \cos(x+y) \end{pmatrix}$$

なので , 各点の極値の判定ができる .

(5) $f_x = 2x + y - \frac{3}{x^2}$, $f_y = x + 2y - \frac{3}{y^2}$ である . $f_x = f_y = 0$ とすれば $2x^3 + x^2y = 3$, $xy^2 + 2y^2 = 3$ であり , これを辺辺引けば $(x-y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0$ である . $2x^2 + 3xy + 2y^2 > 0$ なので $x = y$ でなければならない . 後は簡単な計算である .

問題 4.* 微分作用素は線形であるので , 単項式 $x^{n-k}y^k$ に対して示せば十分 .

$x \frac{\partial}{\partial x} (x^{n-k}y^k) = (n-k)x^{n-k}y^k$, $y \frac{\partial}{\partial y} (x^{n-k}y^k) = kx^{n-k}y^k$ なので ,

$$x \frac{\partial}{\partial x} (x^{n-k}y^k) + y \frac{\partial}{\partial y} (x^{n-k}y^k) = nx^{n-k}y^k. \quad \square$$

小レポート 5

(1) 手違いで先週分と同じ問題を出題していました .

(2) $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$ なので , $f_x = f_y = 0$ をみたす点は $\pm(1, 1)$, $\pm(1, -1)$ の 4 点 . Hesse 行列は $H_f(x) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}$ なので , 極値判定も容易にできる . 点 $(1, 1)$ で極小値 -4 をとり , 点 $(-1, -1)$ で極大値 4 をとる . また , 点 $(1, -1)$ および $(-1, 1)$ で鞍点になる .

演習問題 6

問題 1.[†] 与えられた 2 変数関数を $f(x, y)$ で表す . また , それぞれの曲線を描いたグラフは , 全問の解答の後ろに載せている .

(1) $f_x = 4x^3 - 4y$, $f_y = -4x + 4y^3$ である . $f_x = f_y = 0$ とすれば $x^3 = y$ かつ $x = y^3$ となるので , $x = x^6$ すなわち $x = 0, 1$ となる . よって停留点は $(x, y) = (0, 0), (1, 1)$ の 2 つであり , このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0, 0)$ のみである . さて $H_f = \begin{pmatrix} 12x^2 & -4 \\ -4 & 12y^2 \end{pmatrix}$ なので , $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$ より , $(0, 0)$ は鞍点である . 以上より , N_f の特異点は原点 $(0, 0)$ のみであり , これは結節点になる .

(2) $f_x = 6x^2 - 6x$, $f_y = 6y^2 - 6y$ である . $f_x = f_y = 0$ とすれば $x^2 - x = 0$ かつ $y^2 - y = 0$ となるので , 停留点は $(x, y) = (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)$ の 4 つであり , このうち曲線 N_f 上にあるのは $(0, 1), (1, 0)$ の 2 つである . さて $H_f = \begin{pmatrix} 12x-6 & 0 \\ 0 & 12y-6 \end{pmatrix}$ であるが , $H_f(0, 1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $H_f(1, 0) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$ より , いずれの場合も鞍点になる . 以上より , N_f の特異点は $(0, 1), (1, 0)$ の 2 つであり , これはいずれの場合も結節点になる .

(3) $f_x = y - 3x^2$, $f_y = 2y + x$ である . $f_x = f_y = 0$ とすれば $y = 3x^2$ かつ $y = -x/2$ となるので , $x(6x + 1) = 0$ すなわち $x = 0, -1/6$ となる . よって停留点は $(x, y) = (0, 0), (-1/6, 1/12)$ の 2 つであり , このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0, 0)$ のみである . さて $H_f = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ なので , $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ より , $(0, 0)$ は鞍点である . 以上より , N_f の特異点は原点 $(0, 0)$ のみであり , これは結節点になる .

(4) $f_x = 2x$, $f_y = 4y^3 - 2y$ である . $f_x = f_y = 0$ とすれば $x = 0$ かつ $2y(2y^2 - 1) = 0$ となるので , 停留点は $(x, y) = (0, 0), \pm(0, 1/\sqrt{2})$ の 3 つであり , このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0, 0)$ のみである . さて $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$ なので , $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ より , $(0, 0)$ は鞍点である . 以上より , N_f の特異点は原点 $(0, 0)$ のみであり , これは結節点になる .

問題 2. (1) $A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

(i) 開集合でも閉集合でもない .

(ii) $\partial A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} \text{(a) } x = 0, 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1 \\ \text{(b) } y = 0, 1 \text{ かつ } 0 \leq x \leq 1 \end{array} \right\}$

(2) $A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2$

(i) 閉集合 . (ii) $\partial A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\}$

(3) $A_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2; \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$

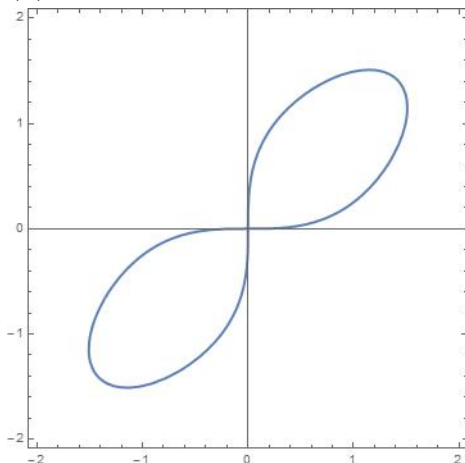
(i) 開集合でも閉集合でもない．

(ii) $\partial A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq 1\}$

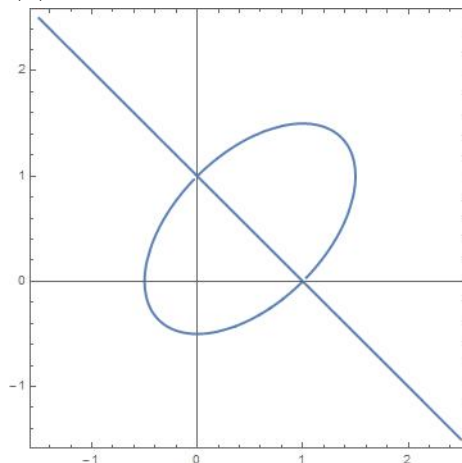
(コメント) (1), (2) においては, 境界は図を描けばすぐにわかる．解答する際も「図よりこうなる」で十分である．ただし, (3) は直感と反する結果になっていることに注意． A_3 のどの点の近傍にも必ず無理数を座標に持つものが存在するので, A_3 は内点を持たないので開集合ではない．そしてその補集合には $\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, x, y \text{ のいずれかは無理数}\}$ が含まれるが, この集合は先程と同様に理由により内点を持たない(有理数の稠密性)．したがって, 補集合も開集合にならないので, A_3 は閉集合でもない．またこの議論から $\{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ が境界の定義を満たすこともわかる．

► 問題 1 の曲線のグラフは以下のようにになっている．

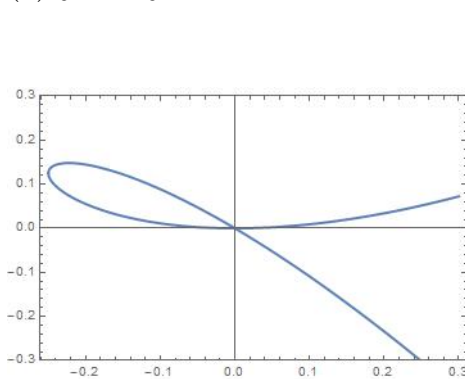
(1) $x^4 - 4xy + y^4 = 0$



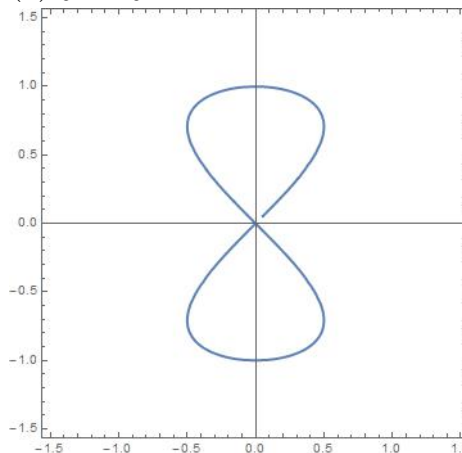
(2) $2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$



(3) $y^2 + xy - x^3 = 0$



(4) $y^4 - y^2 + x^2 = 0$



小レポート 6

(1) 有理関数 (多項式を多項式で割ったもの) の積分である．まず部分分数分解により基本的なものに分割してから積分を実行する．

▶ $f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

$x^2 - 1 = (x + 1)(x - 1)$ より $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1}$ のように表すことができる．

これは x に関する恒等式なので，両辺に $x^2 - 1$ を掛けて計算すれば $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$ を得る．したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - 1} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right) dx = \frac{1}{2} (\log |x - 1| - \log |x + 1|) \\ &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right|. \quad \square \end{aligned}$$

▶ $f_2(x) = \frac{1}{x^4 - 1}$

$\frac{1}{x^4 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right)$ なので， f_1 の結果を用いれば

$$\int \frac{dx}{x^4 - 1} = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx = \frac{1}{4} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| - \frac{1}{2} \operatorname{Arctan} x. \quad \square$$

▶ $f_3(x) = \frac{1}{(x + 1)(x^2 - 1)}$

$(x + 1)(x^2 - 1) = (x + 1)^2(x - 1)$ より， $\frac{1}{(x + 1)(x^2 - 1)} = \frac{a}{x - 1} + \frac{b}{x + 1} + \frac{c}{(x + 1)^2}$ のように表すことができる．これは恒等式なので，両辺に $(x + 1)(x^2 - 1)$ を掛けて計算すれば $a = \frac{1}{4}$, $-b = \frac{1}{4}$, $c = -\frac{1}{2}$ を得る．したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x + 1)(x^2 - 1)} &= \frac{1}{4} \int \left(\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} - \frac{2}{(x + 1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{4} \log \left| \frac{x - 1}{x + 1} \right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x + 1}. \quad \square \end{aligned}$$

▶ $f_4(x) = \frac{1}{x^3 - 1}$

$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ なので $\frac{1}{x^3 - 1} = \frac{a}{x - 1} + \frac{bx + c}{x^2 + x + 1}$ と分解できる．これを解けば $a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = -\frac{2}{3}$ である．さて， $\frac{1}{x^2 + x + 1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + x + 1}$ であるが， $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$ なので $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ と変数変

換すれば

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{\frac{3}{4}(u^2 + 1)} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} u = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3 - 1} &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} + \frac{-x-2}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x^2+x+1)'}{x^2+x+1} - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \log|x-1| - \frac{1}{6} \log(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{Arctan} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

(2) f および g により定まる曲線は，解答の後ろに載せています．

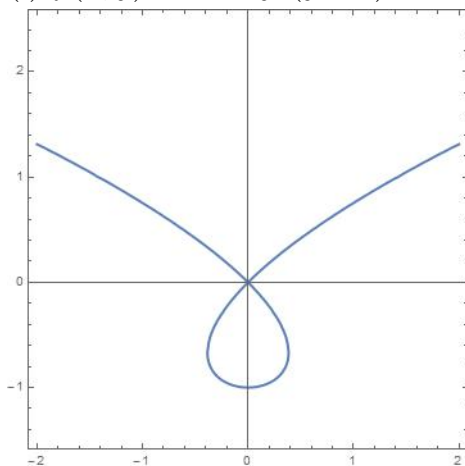
- (i) $f(x, y) = x^2 - y^2(y+1)$

$f_x = 2x$, $f_y = -3y^2 - 2y$ である． $f_x = f_y = 0$ とすれば $x = 0$ かつ $y(3y+2) = 0$ となるので，停留点は $(x, y) = (0, 0), (0, -\frac{2}{3})$ の 2 つであり，このうち曲線 N_f 上にあるのは原点 $(0, 0)$ のみである．さて $H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -6y-2 \end{pmatrix}$ なので， $H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ より， $(0, 0)$ は鞍点である．以上より， N_f の特異点は原点 $(0, 0)$ のみであり，これは結節点になる．

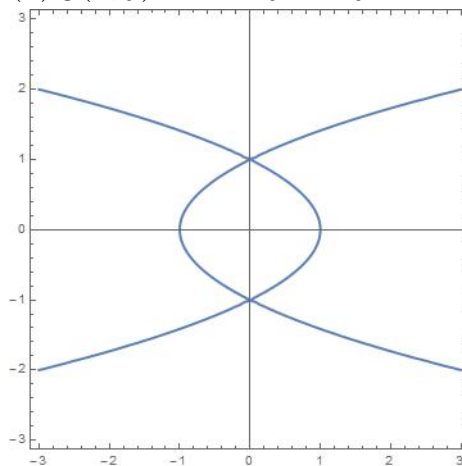
- (ii) $g(x, y) = x^2 - y^4 + 2y^2 - 1$

$g_x = 2x$, $g_y = -4y^3 + 4y$ である． $g_x = g_y = 0$ とすれば $x = 0$ かつ $4y(y^2 - 1) = 0$ となるので，停留点は $(x, y) = (0, 0), \pm(0, 1)$ の 3 つであり，このうち曲線 N_g 上にあるのは原点 $\pm(0, 1)$ の 2 つである．さて $H_g = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -12y^2 + 4 \end{pmatrix}$ なので， $H_g(0, \pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$ より， $\pm(0, 1)$ はいずれも鞍点である．以上より， N_g の特異点は 2 点 $\pm(0, 1)$ であり，これはいずれの場合も結節点になる．

- (i) $f(x, y) = x^2 - y^2(y+1)$



- (ii) $g(x, y) = x^2 - y^4 + 2y^2 - 1$



演習問題 7

問題 1. Lagrange の未定乗数法を用いる．条件を与える曲線の特異点を調べることを忘れずに．条件を与える関数を $g(x, y)$, 極値を考える関数を $f(x, y)$ とおく．

(1) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 6$ であるが, $g(x, y) = 0$ は円なので特異点を持たない．さて, $F(x, y) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とおくと,

$$\begin{aligned} F_x &= 4x^3 - 4y - 4x - 2\lambda x = 0, \\ F_y &= 4y^3 - 4x - 4y - 2\lambda y = 0, \\ F_\lambda &= -(x^2 + y^2 - 6) = 0 \end{aligned}$$

である．このまままだうまく解けないので, $F_x + F_y = 0$ および $F_x - F_y = 0$ として考える．

$$\begin{aligned} F_x + F_y &= 2(x + y)\{2(x^2 - xy + y^2) - 4 - \lambda\} = 0 \\ F_x - F_y &= 2(x - y)\{2(x^2 + xy + y^2) - \lambda\} = 0 \end{aligned}$$

これより① $x = y$, ② $x = -y$, ③ $2(x^2 - xy + y^2) - 4 - \lambda$ かつ $2(x^2 + xy + y^2) - \lambda$, となる．①のときは候補点 $A^\pm = \pm(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, ②のときは候補点 $B^\pm = \pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$, ③のときは候補点 $C^\pm = \pm(\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} + 1)$ および $D^\pm = \pm(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} - 1)$ を得る．これの値を円周上に書き込めば極値を判定できる．点 A^\pm で極小値 -6 , 点 B^\pm で極小値 18 , 点 C^\pm および D^\pm で極大値 26 をとる．

コメント．③では, まず $xy = -1$ となることを導き, これを $x^2 + y^2 = 6$ に代入して値を求める．値の計算において, $f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) - 2xy(xy + 2)$ と変形すると計算がしやすい．

(2) $g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ であるが, 平面曲線 N_g の特異点は例題 6.4 より原点 $O = (0, 0)$ のみ．さて, $F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ のとき,

$$\begin{aligned} F_x &= y - \lambda(3x^2 - 3y), \\ F_y &= x - \lambda(3y^2 - 3x), \\ F_\lambda &= -(x^3 + y^3 - 3xy) = 0 \end{aligned}$$

である． $\lambda \neq 0$ かどうかで場合を分ける． $\lambda = 0$ のときは $x = y = 0$ となり, これは原点である． $\lambda \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{\lambda} = 3 \cdot \frac{x^2 - y}{y} = 3 \cdot \frac{y^2 - x}{x}$$

であるので, 式を整理すれば $x^3 - y^3 = 0$, すなわち $x = y$ を得る．このとき

$$0 = 2x^3 - 3x^2 = x^2(2x - 3)$$

より, $x = 0, \frac{3}{2}$ となるので, 原点と $A = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$ の 2 点を候補点として得る. さて, $f(0,0) = 0$ であるが, 原点の近くにおいて曲線 N_g は第 1 象限と第 2,4 象限の方向に続いていく. 第 1 象限では f は正, 第 2,4 象限で f は負であるので, 原点は極値にはなれない. 一方, 点 A で極大値 $\frac{9}{4}$ をとることは図を書いて確認できる.

(3) $g(x,y) = (x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)$ であるが, $g_x = 4x(x^2 + y^2 - 1)$, $g_y = 4y(x^2 + y^2 + 1)$ なので, 特異点は原点 O のみである (候補点として $\pm(1,0)$ も現れるが, これは曲線上にない). さて, $F(x,y) = f(x,y) - \lambda g(x,y)$ のとき,

$$\begin{aligned} F_x &= y - \lambda \cdot 4x(x^2 + y^2 - 1) = 0, \\ F_y &= x - \lambda \cdot 4y(x^2 + y^2 + 1) = 0, \\ F_\lambda &= -\{(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 - y^2)\} = 0 \end{aligned}$$

である. $\lambda \neq 0$ かどうかで場合を分ける. $\lambda = 0$ のときは $x = y = 0$ となり, これは原点である. $\lambda \neq 0$ のとき,

$$\frac{1}{\lambda} = 4x \cdot \frac{x^2 + y^2 - 1}{y} = 4y \cdot \frac{x^2 + y^2 + 1}{x}$$

であるので, 式を整理すれば

$$x^4 - x^2 - y^4 - y^2 = (x^2; y^2)(x^2 - y^2 - 1) = 0$$

となる. 原点は除去してよいので (原点はすでに候補に上がっている), $x^2 = y^2 + 1$ である. このとき

$$(2y^2 + 1)^2 = 2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{\sqrt{2}-1}{2}, \quad x^2 = \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

となるので, 候補点 $A^\pm = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$ および $B^\pm = \pm \left(\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}, -\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \right)$ を得る. (2) と同じ理由により原点 O は極値にならない. また, f は点 A^\pm で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}$, 点 B^\pm で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ をとる.

問題 2. 内部と境界とに場合を分けて考える.

(1) 問題の f は $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy - 2x^2 - 2y^2$ としてください. まず内部について考える. $f(x,y)$ の停留点は $(x,y) = (0,0), \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ の三点で, それぞれ $f(0,0) = 0$, $f(\pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})) = 8$ となる. 次に境界の場合であるが, 一部は既に問題 1 の (1) で求めている. それは A^+, B^+, C^+, D^+ で, それぞれ $f(A^+) = -6$, $f(B^+) = 18$, $F(C^+) = f(D^+) = 26$ である. 残るは y 軸上の線分である. $h(y) := f(0,y) = y^4 - 2y^2$ ($-\sqrt{6} \leq y \leq \sqrt{6}$) の最大最小を考えると, $y = \pm\sqrt{6}$ で最大値 24, $y = \pm 1$ で最小値 -1 をとる. 以上をまとめれば, f はこの領域上におい

て, $(x, y) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ で最小値 -8 を取り, $(x, y) = (\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} + 1)$ および $(\sqrt{2} - 1, -\sqrt{2} - 1)$ で最大値 26 をとる.

(2) まず f の停留点を求める. $f_x = 3x^2$, $f_y = 3y^2$ なので停留点は原点のみであり, そこでの値は $f(0, 0) = 0$ である. 次に条件を与える曲線の特異点を求める. $g_x = 2x$, $g_y = 4y^3 - 2y$ なので候補点は $(0, 0)$, $\pm(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ の3点. この内で曲線上にあるのは原点のみなので, 特異点も原点のみ. さて, ここで Lagrange の未定乗数法を用いる. $F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とすれば

$$\begin{aligned} F_x &= 3x^2 - 2\lambda x = 0, \\ F_y &= 3y^2 - 2\lambda(2y^3 - y) = 0, \\ F_\lambda &= -(y^4 - y^2 + x^2) = 0. \end{aligned}$$

まず $(x, y) \neq (0, 0)$ と仮定する. このとき

$$\lambda = \frac{3x}{2} = \frac{3y}{4y^2 - 2}$$

となるので $x = \frac{y}{2y^2 - 1}$ となる. これを $g(x, y) = 0$ に代入してみると, 実数解を持たないことが分かる. 次に $x = 0$, $y \neq 0$ とする. このとき, 条件は $y = \pm 1$ となるが ($y = 0$ は除外できる), $\lambda = \pm \frac{3}{2}$ とすれば $F_x = F_y = F_\lambda = 0$ となるので, $(x, y) = \pm(0, 1)$ が候補点を与える. このとき $f(\pm(0, 1)) = \pm 1$ である. 最後に $x \neq 0$ かつ $y = 0$ とすると, 条件は $x = 0$ となるので不適. 以上より, 調べるべきものは全て調べたので最大値・最小値を決定できる. f は領域 $y^4 - y^2 + x^2 \leq 0$ において, $(x, y) = (0, 1)$ において最大値 1 を取り, $(x, y) = (0, -1)$ において最小値 -1 を取る.

(3) まず f の停留点を求める. $f_x = y$, $f_y = x$ なので停留点は原点のみで, このとき $f(0, 0) = 0$ である. 次に境界の特異点を調べるが, 今の場合は楕円なので, 特異点はない. Lagrange の未定乗数法を用いる. $F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とすれば

$$\begin{aligned} F_x &= y - \frac{2\lambda x}{9} = 0, \\ F_y &= x - \frac{2\lambda y}{4} = 0, \\ F_\lambda &= -(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - 1) = 0. \end{aligned}$$

今の場合は $F_x = F_y = 0$ の方程式は次の連立1次方程式である:

$$\begin{pmatrix} \frac{-9\lambda}{2} & 1 \\ 1 & \frac{-\lambda}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

これが $(x, y) = (0, 0)$ 以外の解を持つためには, 係数行列の行列式が 0 であることが必要十分である. それは $\lambda = \pm 3$ のときである. さて, このとき上の連立

方程式の解を求めると、 $(x, y) = s(3, \pm 2)$ (s はパラメータ) である。これが楕円 N_g 上にあるので、 $s = \frac{\pm 1}{\sqrt{2}}$ である。これより候補点は $A^\pm = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$ および $B^\pm = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}} \right)$ となる。それぞれにおける f の値は、 $f(A^\pm) = 3$, $f(B^\pm) = -3$ である。以上により、調べるべきものはすべて調べたので最大値・最小値を決定できる。 f は領域 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ において、 $(x, y) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}} \right)$ において最大値 3 を取り、 $(x, y) = \pm \left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{-2}{\sqrt{2}} \right)$ において最小値 -3 を取る。

小レポート 7

(1) 積分区間内に不連続点があればそこで分割して考える．積分区間が無限ならば，まず有界であるところで考えて，そのあと極限を取る．

(i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$; 不連続点は原点． $\int \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = 2 \operatorname{sgn} x \cdot \sqrt{|x|}$ なので，

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} \int_{\varepsilon_2}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow +0} [-2\sqrt{|x|}]_{-1}^{-\varepsilon_1} + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow +0} [2\sqrt{|x|}]_{\varepsilon_2}^1 = 4. \end{aligned}$$

(ii) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$; 不連続点は原点． $\int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$ であるが， $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ は発散するので，この広義積分は発散する．

(iii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}}$; 被積分関数の原始関数は容易には計算できない上に，区間が有限ではない．このような場合の収束・発散は他の簡単な関数と比較することにより判断する．今は $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} \approx \frac{1}{x}$ であるので，発散すると予測できる．さて， $x > 0$ のとき $x^3 + 1 < (x+1)^3$ であるので， $\frac{1}{\sqrt[3]{x^3+1}} > \frac{1}{x+1}$ となる．したがって， $R > 0$ のとき

$$\int_0^R \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3+1}} \geq \int_0^R \frac{dx}{x+1} = [\log(x+1)]_0^R = \log(R+1) \rightarrow +\infty \quad (R \rightarrow +\infty)$$

となるので，この広義積分は確かに発散する．

(2) 次の手順により解いていく．① 領域内にある極値を求める．② 境界の特異点を探す．③ 境界上の極値を求める．④ 以上を総括して最大値・最小値を決定する．

① $f_x = 3x^2 - 3$, $f_y = 3y^2 - 3$ であるので，停留点は $\pm(1, 1)$, $\pm(1, -1)$ の 4 点．この内で D の内部にあるものは $A^\pm = (1, \pm 1)$ の 2 点．そこでの値はそれぞれ $f(A^+) = -4$, $f(A^-) = 0$ である．② まずは円周 $x^2 + y^2 = 4$ 上で考える．このとき特異点はない．③ Lagrange の未定乗数法を用いる． $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ とおき， $F(x, y) = f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とすると，

$$F_x = 3x^2 - 3 - 2\lambda x = 0, \quad F_y = 3y^2 - 3 - 2\lambda y = 0, \quad F_\lambda = -(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

である．このままだと解きづらいので， $F_x + F_y = 0$, $F_x - F_y = 0$ として考える．

$$F_x + F_y = \lambda(x + y) = 3 \quad \cdots \textcircled{1} \quad F_x - F_y = (x - y)(3(x + y) - 2\lambda) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①より $\lambda \neq 0$ および $x + y \neq 0$ が，②より $x - y = 0$ または $3(x + y) - 2\lambda = 0$ がわかる．

(i) $x = y$ のとき．候補点 $B^\pm = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ を得る．そこでの値は $f(B^\pm) = \mp 2\sqrt{2}$ である．

(ii) $3(x+y) = 2\lambda$ のとき . ①と合わせると $(x+y)^2 = 2$ となる . 紛れが生じないように $y = -x + \sqrt{2}\varepsilon$ ($\varepsilon = \pm 1$) とかく . これを $F_\lambda = 0$ に代入して解を求めると

$$x = \frac{\pm\sqrt{6} + \sqrt{2}\varepsilon}{2}, \quad y = \frac{\mp\sqrt{6} + \sqrt{2}\varepsilon}{2} \quad (\text{複合同順})$$

となる . したがって候補点

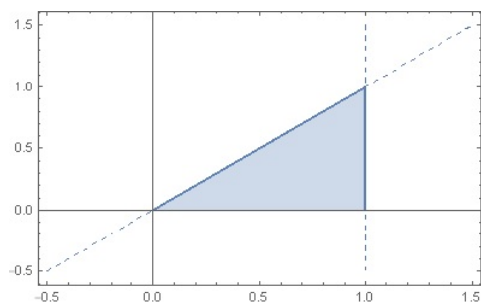
$$C^\pm = \pm \left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right), \quad D^\pm = \pm \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} \right)$$

を得る . そこでの値はそれぞれ $f(C^\pm) = \pm 2\sqrt{2}$, $f(D^\pm) = \mp 2\sqrt{2}$ である . ③' 次に y 軸上の線分について考える . $h(y) = f(0, y) = y^3 - 3y$ ($-2 \leq y \leq 2$) の最大値 , 最小値を考えると , $y = 2, -1$ で最大値 2 , $y = 1, -2$ で最小値 -2 を取ることが分かる (高校レベルの問題なので解説略) . ④ 以上をまとめて図に値を書き込んでいくことにより , 最大値・最小値を決定できる (図を書くのが大変だったので , 図は省略します) . 以上により , 領域 D 内において , f は点 $(1, 1)$ で最小値 -4 , 点 $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)$ で最大値 $2\sqrt{2}$ を取る .

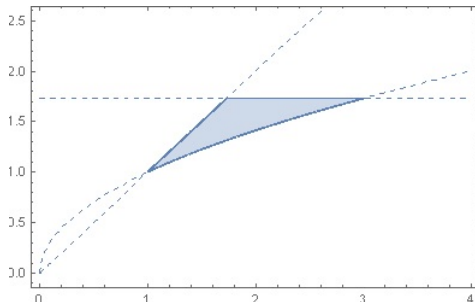
演習問題 8

問題 1. それぞれ以下の通り．なお，(5) は $x, y \geq 0$ とすべき問題でした．

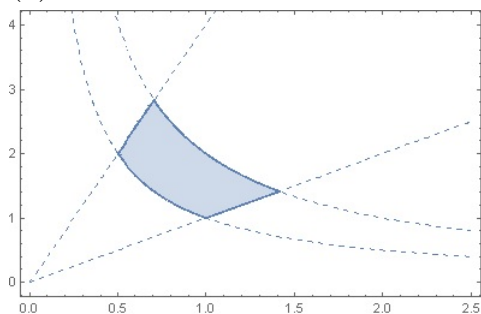
(1)



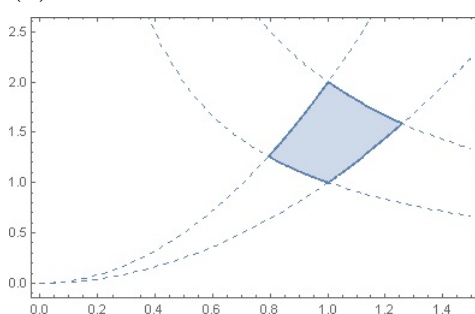
(2)



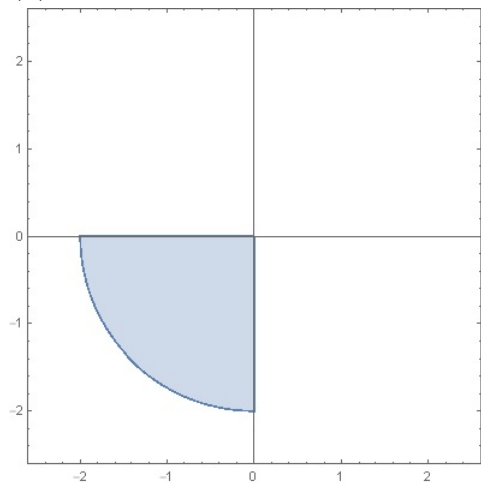
(3)



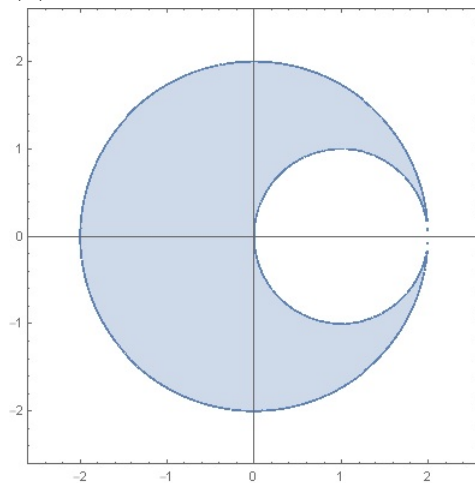
(4)



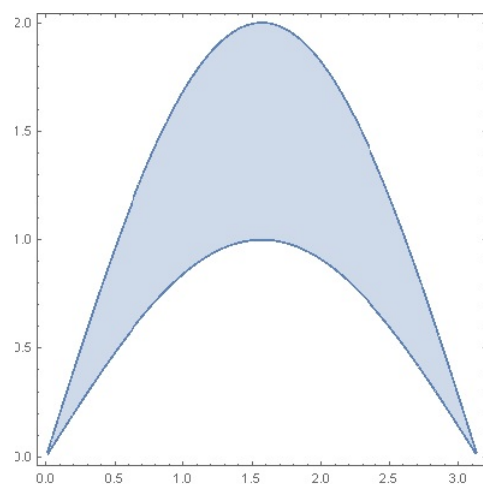
(5)



(5) で条件 $x, y \leq 0$ を落としたもの



問題 2. 色々構成できるが、例えば次のような形にすればよい.



問題 3.* 講義で紹介した有理数点からなる集合や, \mathbb{R}^2 全体 (面積が ∞ になるため) など.

小レポート 9

(1) まず，被積分関数の分子にある多項式の次数を，分母のものよりも小さくする．

$$\frac{x^5 + 1}{x^3 + x} = \frac{(x^2 - 1)(x^3 + x) + (x + 1)}{x^3 + x} = x^2 - 1 + \frac{x + 1}{x^3 + x}.$$

次に有理関数 (右の分数になっているもの) を部分分数分解する． $x^3 + x = x(x^2 + 1)$ なので，

$$\frac{x + 1}{x^3 + x} = \frac{a}{x} + \frac{bx + c}{x^2 + 1}$$

のように分解できる．両辺に $x^3 + x$ を掛けて

$$x + 1 = a(x^2 + 1) + (bx + c)x = (a + b)x^2 + cx + a.$$

これが x に関する恒等式なので， $c = 1$, $a = 1$, $b = -a = -1$ を得る．よって，

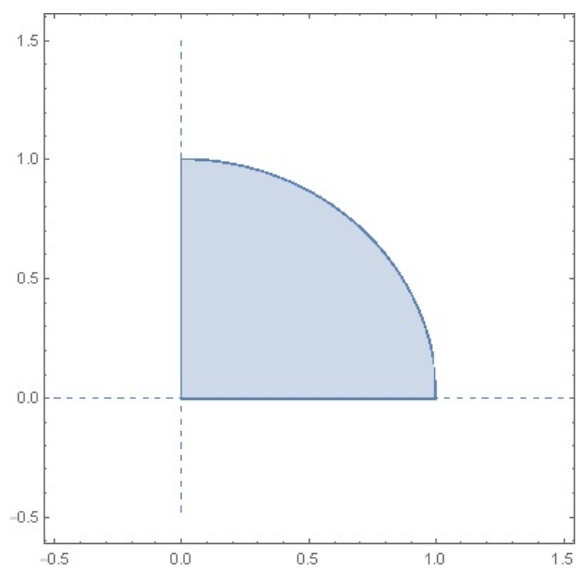
$$\frac{x + 1}{x^3 + x} = \frac{1}{x} + \frac{-x + 1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1}.$$

2 番目の等式は，積分を実行しやすくするための式変形である．以上より，積分が実行できる．

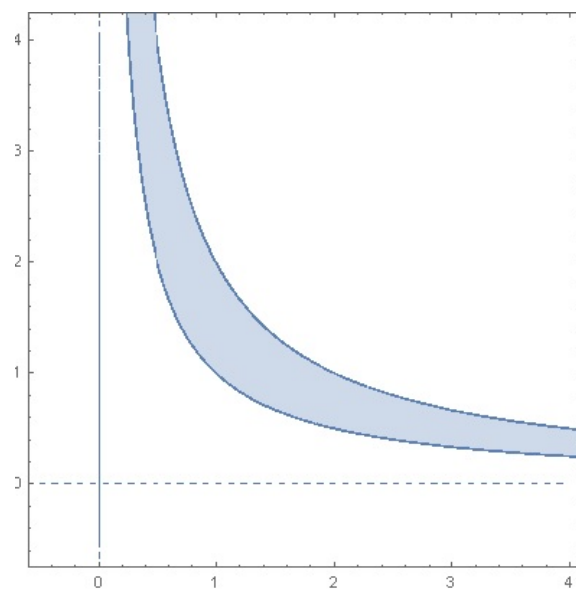
$$\begin{aligned} \int \frac{x^5 + 1}{x^3 + x} dx &= \int \left\{ (x^2 - 1) + \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} \right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \log|x| - \frac{1}{2} \log(x^2 + 1) + \operatorname{Arctan} x \\ &= \frac{1}{3}x^3 - x + \frac{1}{2} \log \frac{x^2}{x^2 + 1} + \operatorname{Arctan} x. \end{aligned}$$

(2) それぞれ次のような図形になる．

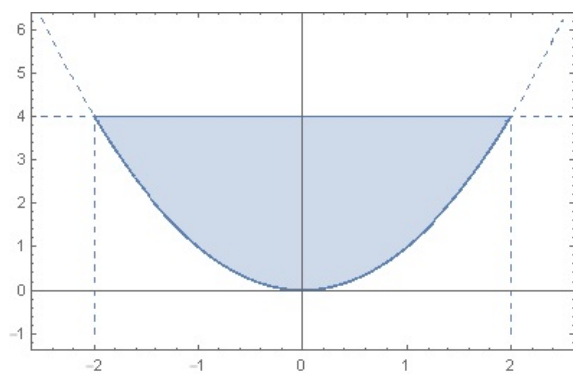
(i)



(ii)



(iii)



演習問題 9

問題 1. (1) (i) $\frac{1}{4}$ (ii) $\log \frac{4}{3}$ (iii) $(e-1)^2$ (iv) $\frac{\pi-2}{4}$ (2) (i) $\frac{1}{8}$ (ii) $\frac{\pi}{8}$ (3) 1

解説 . (1) (i) 特に解説することなし .

$$\int_D xy \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \left(\int_0^1 xy \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{2} \cdot x \right) dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

(ii) これも特に解説することなし .

$$\begin{aligned} \int_D \frac{dx}{(x+y+1)^2} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{1}{(x+y+1)^2} dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{-1}{x+y+1} \right]_{x=0}^1 dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{y+1} - \frac{1}{y+2} \right) dy = \left[\log(y+1) - \log(y+2) \right]_{y=0}^1 \\ &= (\log 2 - \log 3) - (\log 1 - \log 2) = \log \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

(iii) これも特に解説することなし .

$$\int_D e^{x+y} \, d\mathbf{x} = \int_0^1 \left(\int_0^1 e^{x+y} \, dx \right) dy = (e-1) \cdot \int_0^1 e^y \, dy = (e-1)^2.$$

(iv) x を先に計算するほうが楽 . 最初の x の積分において $u = yx$ と変数変換する .

$$\begin{aligned} \int_D \frac{y^2}{x^2 y^2 + 1} \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2}{x^2 y^2 + 1} \, dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^y \frac{y}{u^2 + 1} \, du \right) dy \\ &= \int_0^1 \left[y \operatorname{Arctan} u \right]_{u=0}^y dy = \int_0^1 y \operatorname{Arctan} y \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} \right)' \operatorname{Arctan} y \, dy = \left[\frac{y^2}{2} \operatorname{Arctan} y \right]_{y=0}^1 - \int_0^1 \frac{y^2}{2} \cdot \frac{1}{y^2 + 1} \, dy \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{y^2 + 1} \right) dy = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left[y - \operatorname{Arctan} y \right]_{y=0}^1 \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi-2}{4}. \end{aligned}$$

(2) (i) x, y どちらから計算してもよいが , ここでは y から計算する . つまり D を縦線領域と思う . $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$ であるので ,

$$\begin{aligned} \int_D xy \, d\mathbf{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[x \cdot \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 x(1-x^2) dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(ii) これも x, y どちらから計算してもよい . (i) と同様に y から先に計算する .

$$\begin{aligned}\int_D (1 - x^2 - y^2) d\mathbf{x} &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x^2 - y^2) dy \right) dx \\ &= \int_0^1 \left[(1 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx.\end{aligned}$$

ここで , $x = \cos \theta$ と変数変換すると , (簡単のため定数 $2/3$ は書いてない)

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos^2 \theta)^{\frac{3}{2}} \cdot (-\sin \theta d\theta) = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta.$$

ここで $\sin^4 \theta = (-\cos \theta)' \sin^3 \theta$ と思って部分積分をすると , $I = \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta d\theta$ は

$$I = \left[-\sin^3 \theta \cos \theta \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta = 3 \int_0^{\pi/2} (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) d\theta.$$

ここで $\int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = \frac{\pi}{4}$ より $I = \frac{3}{4}\pi - 3I$. よって $I = \frac{3}{16}\pi$ となるので ,

$$\int_D xy d\mathbf{x} = \frac{2}{3} \int_0^1 (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{16}\pi = \frac{\pi}{8}.$$

(3) 与えられた領域が縦線領域なので , 素直に y から先に計算する .

$$\begin{aligned}\int_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) d\mathbf{x} &= \int_0^3 \left(\int_0^{2-\frac{2x}{3}} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) dy \right) dx \\ &= \int_0^3 \left[\left(1 - \frac{x}{3}\right)y - \frac{y^2}{4} \right]_{y=0}^{2-\frac{2x}{3}} dx \\ &= \frac{1}{4} \cdot \int_0^3 \left(2 - \frac{2x}{3}\right) \left\{ 4\left(1 - \frac{x}{3}\right) - \left(2 - \frac{2x}{3}\right) \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \int_0^3 \left(2 - \frac{2x}{3}\right)^2 dx.\end{aligned}$$

ここで $u = 2 - \frac{2x}{3}$ と変数変換すれば ,

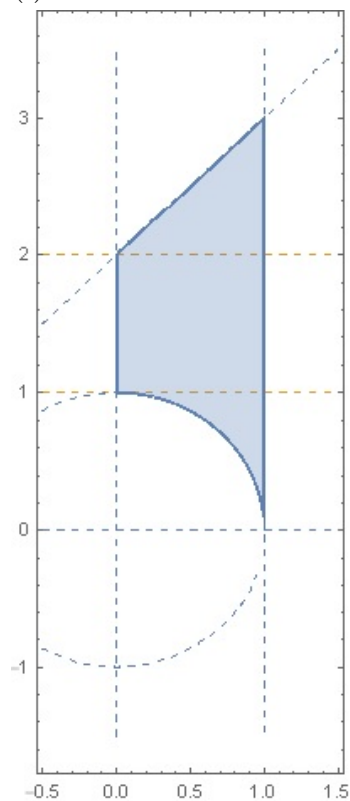
$$\frac{1}{4} \int_0^3 \left(2 - \frac{2x}{3}\right)^2 dx = \frac{1}{4} \int_0^2 u^2 \cdot \frac{3}{2} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3} = 1.$$

問題 2. (i) $\int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-y^2}}^1 f(x, y) dx \right) dy + \int_1^2 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy + \int_2^3 \left(\int_{y-2}^1 f(x, y) dx \right) dy$

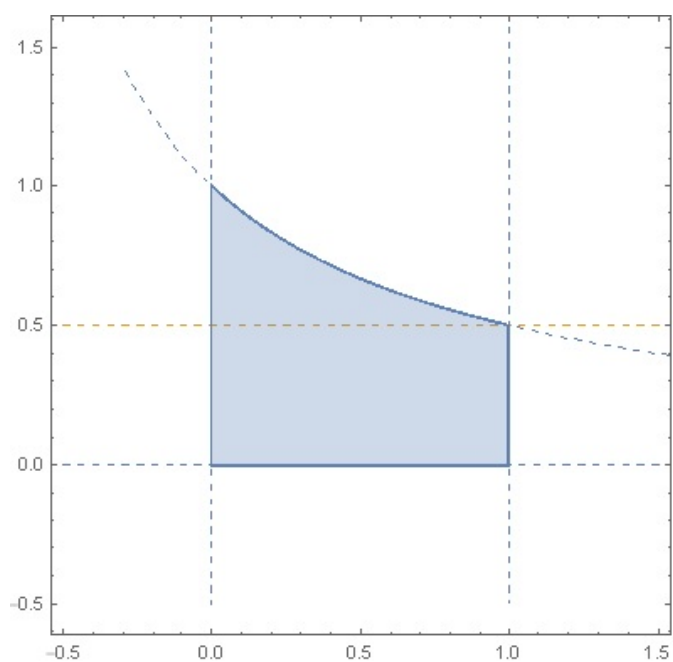
(ii) $\int_0^{1/2} \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy + \int_{1/2}^1 \left(\int_0^{(1-y)/y} f(x, y) dx \right) dy$

以下のように図を描き，どのように分割するかを考える．

(i)

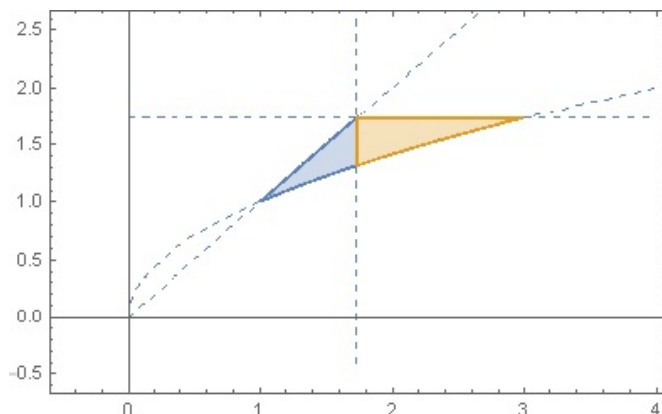


(ii)



小レポート 9

まずは積分領域 D を縦線領域に分割する．そのために図を描く．



よって，与えられた領域を次の2つの領域に分割すれば良いことが分かる．

$$D_1 = \{(x, y); 1 \leq x \leq \sqrt{3}, \sqrt{x} \leq y \leq x\}, \quad D_2 = \{(x, y); \sqrt{3} \leq x \leq 3, \sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{3}\}.$$

これより，次のように計算できる．

$$\begin{aligned} I &= \int_D \frac{y}{x^2 + y^2} dx = \int_{D_1} \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \int_{D_2} \frac{y}{x^2 + y^2} dx \\ &= \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{\sqrt{x}}^x \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 \left(\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} \frac{y}{x^2 + y^2} dy \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{3}} \left[\log(x^2 + y^2) \right]_{y=\sqrt{x}}^x dx + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{3}}^3 \left[\log(x^2 + y^2) \right]_{y=\sqrt{x}}^{\sqrt{3}} dx \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^{\sqrt{3}} \left(\log(2x^2) - \log(x^2 + x) \right) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 \left(\log(x^2 + 3) - \log(x^2 + x) \right) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_1^{\sqrt{3}} \log(2x^2) dx + \int_{\sqrt{3}}^3 \log(x^2 + 3) dx - \int_1^3 \log(x^2 + x) dx \right\}. \end{aligned}$$

積分領域を複数に分割したときでも，上式の第3項のように積分区間をまとめられる場合があるので，各積分領域ごとでの計算ではなく，まとめて計算している．もちろん，別々で計算してもよい．好みの問題である．しかし，ここからは計算ミスを防ぐため，そして式が長くないために個別に計算する．

① $\int \log x dx = x \log x - x$ であることより，

$$\begin{aligned} \int_1^{\sqrt{3}} \log(2x^2) dx &= \int_1^{\sqrt{3}} (\log 2 + 2 \log x) dx = (\sqrt{3} - 1) \log 2 + 2 \left[x \log x - x \right]_1^{\sqrt{3}} \\ &= (\sqrt{3} - 1) \log 2 + \sqrt{3} \log 3 + (2 - 2\sqrt{3}). \end{aligned}$$

後で和を取るの、例えばこの式の最後の項において 2 で括るということはないほうがよい。結局展開することになって二度手間である。

② 部分積分を用いる。

$$\begin{aligned}
 \int_{\sqrt{3}}^3 \log(x^2 + 3) dx &= \int_{\sqrt{3}}^3 (x)' \log(x^2 + 3) dx \\
 &= \left[x \log(x^2 + 3) \right]_{\sqrt{3}}^3 - \int_{\sqrt{3}}^3 x \cdot \frac{2x}{x^2 + 3} dx \\
 &= (3 \log 12 - \sqrt{3} \log 6) - \int_{\sqrt{3}}^3 \left(2 - \frac{6}{x^2 + 3} \right) dx \\
 &= (3 \log 12 - \sqrt{3} \log 6) - 2(3 - \sqrt{3}) + 6 \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{3t^2 + 3} dt \\
 &= (6 - \sqrt{3}) \log 2 + (3 - \sqrt{3}) \log 3 + (2\sqrt{3} - 6) + \frac{6}{\sqrt{3}} \left[\operatorname{Arctan} t \right]_1^{\sqrt{3}} \\
 &= (6 - \sqrt{3}) \log 2 + (3 - \sqrt{3}) \log 3 + (2\sqrt{3} - 6) + \frac{\sqrt{3}\pi}{6}.
 \end{aligned}$$

各括弧の前の符号は + にしておくと計算ミスを減らすことができる。

③ $\int \log(x+1) dx = (x+1) \log(x+1) - (x+1)$ より、

$$\begin{aligned}
 \int_1^3 \log(x^2 + x) dx &= \int_1^3 (\log x + \log(x+1)) dx \\
 &= \left[(x \log x - x) + ((x+1) \log(x+1) - (x+1)) \right]_1^3 \\
 &= \left\{ (3 \log 3 - 3) + (4 \log 4 - 4) \right\} - \left\{ (0 - 1) + (2 \log 2 - 2) \right\} \\
 &= 6 \log 2 + 3 \log 3 - 4.
 \end{aligned}$$

これで I の値が計算できる。

$$I = \frac{\textcircled{1} + \textcircled{2} - \textcircled{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}\pi - 6 \log 2}{12} = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi - \frac{1}{2} \log 2.$$

演習問題 10

問題 1. 極座標変換なので, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ で, このとき Jacobian は

$$d\mathbf{x} = \left| \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \right| dr d\theta = r dr d\theta.$$

(1) 二つ目の等号は, $u = r^2$ という変数変換である.

$$\begin{aligned} \int_D (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2} d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R r^2 e^{-r^2} dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2} \int_0^{r^2} u e^{-u} du \right) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \times \left\{ \left[-u e^{-u} \right]_{u=0}^{R^2} + \int_0^{R^2} e^{-u} du \right\} \\ &= \pi \cdot \left[-u e^{-u} - e^{-u} \right]_{u=0}^{R^2} = \pi \left(1 - (R^2 + 1) e^{-R^2} \right). \end{aligned}$$

(2) ここでは単に $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ としたが, $(x, y) = (R \cdot r \cos \theta, R \cdot r \sin \theta)$ として計算してもよい. また, 二つ目の等号は $r^2 = R^2 u$ という変数変換である.

$$\begin{aligned} \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} d\mathbf{x} &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} \cdot r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 \sqrt{R^2 - R^2 u} \cdot \frac{R^2}{2} du \\ &= \pi R^3 \int_0^1 \sqrt{1 - u} du \\ &= \pi R^3 \left[-\frac{2}{3} (1 - u)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2\pi R^3}{3}. \end{aligned}$$

(3) ここでも $r^2 = u$ という変数変換を行う.

$$\begin{aligned} \int_D \frac{d\mathbf{x}}{(1 + x^2 + y^2)^2} &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R \frac{1}{(1 + r^2)^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \times \frac{1}{2} \int_0^{R^2} \frac{du}{(1 + u)^2} \\ &= \pi \cdot \left[-\frac{1}{1 + u} \right]_0^{R^2} = \frac{\pi R^2}{1 + R^2}. \end{aligned}$$

問題 2. まず (u, v) の変域を決定する. $1 \leq x = u^2 \leq 3$ より $1 \leq u \leq \sqrt{3}$ であり, $0 \leq y = \frac{v}{u} \leq 1$ より $0 \leq v \leq u$ であるので,

$$D' = \left\{ (u, v); 1 \leq u \leq \sqrt{3}, 0 \leq v \leq u \right\}$$

となる. 次に Jacobian を計算する.

$$d\mathbf{x} = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| d\mathbf{u} = \left| \det \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ -\frac{v}{u^2} & \frac{1}{u} \end{pmatrix} \right| d\mathbf{u} = 2 d\mathbf{u}.$$

よって ,

$$\begin{aligned}\int_D \frac{d\mathbf{x}}{(1+x)(1+xy^2)} &= \int_{D'} \frac{2}{(1+u^2)(1+v^2)} d\mathbf{u} \\&= 2 \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_0^u \frac{dv}{(1+u^2)(1+v^2)} \right) du \\&= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{1+u^2} \left[\text{Arctan } v \right]_{v=0}^u \right) du \\&= 2 \int_0^{\sqrt{3}} \frac{\text{Arctan } u}{1+u^2} du = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \text{Arctan } u (\text{Arctan } u)' du \\&= \left[(\text{Arctan } u)^2 \right]_0^{\sqrt{3}} = \left(\frac{\pi}{3} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 = \frac{7}{144} \pi^2.\end{aligned}$$

ここで , $(f(x)^2)' = 2f(x)f'(x)$ より , $2 \int f(x)f'(x) dx = f(x)^2$ であることを用いた .

問題 3. 極座標変換を用いる . r の変域は $1 \leq r \leq 2$ である .

$$\int_D \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \int_0^{2\pi} \left(\int_1^2 \frac{1}{r} \cdot r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

小レポート 10

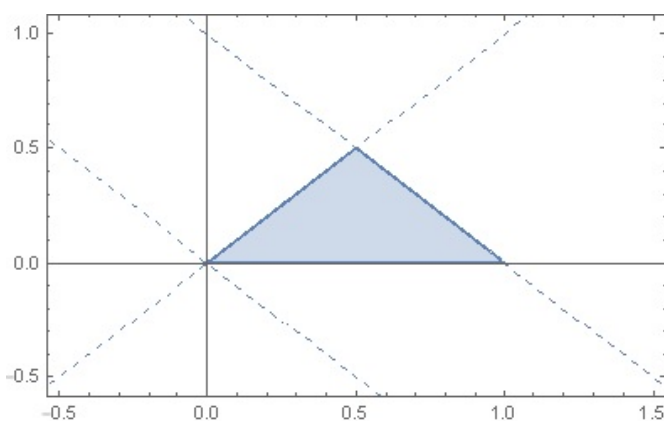
(1) 極座標変換を用いる．二つ目の等号で， $r^2 = u$ という変数変換を行っている．

$$\int_D e^{-x^2-y^2} d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \frac{1}{2} \int_0^{R^2} e^{-u} du = \pi(1 - e^{-R^2}).$$

(2) まず (u, v) の変域 D' を求める． $0 \leq y = u - v \leq x = u + v$ および $0 \leq x = u + v \leq 1$ なので次の 4 つの不等式条件を得る．

$$v \leq u, \quad 0 \leq 2v; \quad -v \leq u, \quad u \leq 1 - v.$$

以上をまとめると下図のようになり， $D' = \{(u, v); 0 \leq v \leq 1/2, v \leq u \leq 1 - v\}$ となる．



次に Jacobian を計算する．

$$d\mathbf{x} = \left| \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \right| d\mathbf{u} = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right| d\mathbf{u} = |-2| d\mathbf{u} = 2 d\mathbf{u}.$$

よって，

$$\begin{aligned} \int_D \frac{x+y}{1+(x-y)^2} d\mathbf{x} &= \int_{D'} \frac{2u}{1+(2v)^2} \cdot 2 d\mathbf{u} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_v^{1-v} \frac{4u}{1+4v^2} du \right) dv \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+4v^2} [2u^2]_{u=v}^{1-v} \right) dv = 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1-2v}{1+4v^2} dv \\ &= \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2} dt = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2t}{1+t^2} \right) dt \\ &= \left[\text{Arctan } t - \frac{1}{2} \log(1+t^2) \right]_0^1 = \frac{\pi}{4} - \log 2. \end{aligned}$$

小レポート 10

(1) ヒントにあるように極座標変換すればよい．

$$\int_{D_1} e^{-x^2-y^2} d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^R e^{-r^2} r dr \right) d\theta = 2\pi \cdot \frac{1}{2} \int_0^{R^2} e^{-u} du = \pi \left[-e^{-u} \right]_0^{R^2} = \pi(1-e^{-R^2}).$$

(2) 与えられた変数変換 $x = u + v$, $y = u - v$ において領域が動対応しているのかを見る．

(1) $0 \leq x \leq 1$ より $0 \leq u + v \leq 1$ ．これより，

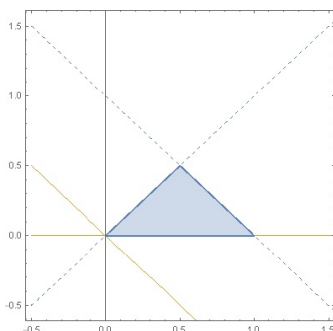
$$(i) \quad 0 \leq u + v \Leftrightarrow v \geq -u \quad (ii) \quad u + v \leq 1 \Leftrightarrow v \leq 1 - u.$$

u, v に関する領域を考えるので，各不等式ごとに u と v との関係を調べると間違いが減る．

(2) $0 \leq y \leq x$ より $0 \leq u - v \leq u + v$ ．これより

$$(iii) \quad 0 \leq u - v \Leftrightarrow v \leq u \quad (iv) \quad u - v \leq u + v \Leftrightarrow v \geq 0.$$

以上の情報をまとめると， $D' = \{(u, v); 0 \leq v \leq 1/2, v \leq u \leq 1 - v\}$ となることが分かる (以下の図を参照のこと．黄線よりも上，青の破線よりも下の領域． $x = 1/2$ のところで折れるので，横線領域と見るほうが計算が楽になる)．



次に Jacobian を計算する．

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2.$$

これより積分が計算できる．途中で $w = 2v$ という変数変換を行っている．

$$\begin{aligned} \int_{D_2} \frac{x+y}{1+(x-y)^2} d\mathbf{x} &= \int_{D'} \frac{2u}{1+(2v)^2} \cdot |-2| du = \int_0^{1/2} \left(\int_v^{1-v} \frac{4u}{1+4v^2} du \right) dv \\ &= 2 \int_0^{1/2} \frac{(1-v)^2 - v^2}{1+4v^2} dv = \int_0^1 \left(\frac{1}{1+w^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2w}{1+w^2} \right) dw \\ &= \left[\text{Arctan } w - \frac{1}{2} \log(1+w^2) \right]_0^1 = \text{Arctan } 1 - \frac{1}{2} \log 2 \\ &= \frac{\pi - 2 \log 2}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

演習問題 11

問題 1. (1) 曲線 $x = y^2$ 上で被積分関数が発散する．そこで，この曲線を避けて積分するために， $D_n = \{(x, y); 0 \leq y \leq 1 - \frac{1}{n}, y^2 + \frac{1}{n} \leq x \leq 1\}$ とおく．この場合は先に x を計算するのが楽である．以下では y に関して偶関数であることを利用している．

$$\begin{aligned} \int_{D_n} \frac{dx}{\sqrt{x-y^2}} &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left(\int_{y^2+\frac{1}{n}}^1 \frac{dx}{\sqrt{x-y^2}} \right) dy = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left[2\sqrt{x-y^2} \right]_{x=y^2+\frac{1}{n}}^1 dy \\ &= \int_0^{1-\frac{1}{n}} \left(\sqrt{1-y^2} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) dy \\ &= 2 \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{1}{n}) + \sin(2 \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{1}{n})) - \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

よって， $\lim_{x \rightarrow 1-0} \operatorname{Arcsin} x = \frac{\pi}{2}$ であることを思い出して，

$$\int_D \frac{dx}{\sqrt{x-y^2}} = 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} \frac{dx}{\sqrt{x-y^2}} = \pi.$$

(2) 積分区間が無限大である．また，この積分区間の中で被積分関数が発散する点はない．そこで，一辺の長さが n の正方形 K_n で第一象限を近似する．

$$\begin{aligned} \int_{K_n} \frac{dx}{(x+y+1)^3} &= \int_0^n \left(\int_0^n \frac{dy}{(x+y+1)^3} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_0^n \left[\frac{1}{(x+y+1)^2} \right]_{y=0}^n dx \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^n \left(\frac{1}{(x+n+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= -\frac{1}{2} \left[-\frac{1}{x+n+1} + \frac{1}{x+1} \right]_0^n \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+1} + 1 \right). \end{aligned}$$

よって，

$$\int_D \frac{dx}{(x+y+1)^3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n+1} - \frac{2}{n+1} + 1 \right) = \frac{1}{2}.$$

(3) 点 $(a, 0)$ を中心とする半径 $1-a$ の円を D' とすると，被積分関数は正なので

$$\int_D \frac{dx}{(x-a)^2 + y^2} \geq \int_{D'} \frac{dx}{(x-a)^2 + y^2}$$

である．さて $(x, y) = (a, 0)$ で被積分関数が発散するので，その点を除いたところで積分する． $x = a + r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ と変数変換すれば

$$\int_{D'} \frac{dx}{(x-a)^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{1-a} \frac{r dr}{r^2} \right) d\theta = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^{1-a} \frac{dr}{r} = 2\pi \log(n(1-a)).$$

これは発散する．元の積分は D' よりも広い領域での積分であり，被積分関数は常に正であるので，元の積分も発散する．

問題 2. (1) $\frac{\sqrt{\pi}}{4}$ (2) $\frac{1}{2} \Gamma(\frac{3}{4})$ *1 (3) $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (4) $\sqrt{2\pi}$ (5) $\frac{\pi}{\sqrt{ac-b^2}}$

(1) $(e^{-x^2})' = -2xe^{-x^2}$ なので，

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x(e^{-x^2})' dx = \left[x e^{-x^2} \right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{4}. \end{aligned}$$

(2) $u = x^2$ という変数変換をすれば

$$\int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{4}} e^{-u} \cdot u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} u^{\frac{3}{4}-1} e^{-u} du = \frac{1}{2} \Gamma(\frac{3}{4}).$$

(3) $u = \log \frac{1}{x}$ とおけば， $u: +\infty \rightarrow 0$ で，

$$x = e^{-u}, \quad du = -\frac{dx}{x} \iff dx = -e^{-u} du.$$

よって，

$$\int_0^1 \left(\log \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{+\infty} u^{1/2} e^{-u} du.$$

ここで $u = v^2$ と変数変換すれば，(1) に帰着される．

$$\int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du = \int_0^{+\infty} v e^{-v^2} \cdot 2v dv = 2 \int_0^{+\infty} v^2 e^{-v^2} dv = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{4} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(4) (3) と同じ変換を行う．すると，

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \log(1/x)}} = \int_0^{+\infty} \frac{u^{-1/2}}{e^{-u/2}} e^{-u} du = \int_0^{+\infty} u^{-u/2} e^{-u/2} du.$$

ここで $u/2 = v^2$ となるように変数変換すると，与えられた積分に帰着される．

$$\int_0^{+\infty} u^{-u/2} e^{-u/2} du = \int_0^{+\infty} (2v^2)^{-1/2} e^{-v^2} \cdot 4v dv = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv = \sqrt{2\pi}.$$

(5) まず次の式に注目する．

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

*1 出題ミスで本来は $\sqrt{x}e^{-x}$ でした．

ここで行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ は対称行列なので，直交行列により対角化可能で，次のように書ける．

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P.$$

ここで λ, μ は行列 A の固有値であり， P は直交行列である．与えられた条件から $\lambda, \mu > 0$ となることが分かる．また， $\lambda \cdot \mu = \det A = ac - b^2$ に注意．さて， $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と変数変換すると， P は直交行列なので Jacobian は ± 1 である．よって

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-ax^2-2bxy-cy^2} d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda u^2-\mu v^2} d\mathbf{u}.$$

正方形による近似列をとれば，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\lambda u^2-\mu v^2} d\mathbf{u} &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u^2} du \times \int_0^{+\infty} e^{-\mu v^2} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{\lambda\mu}} \left(\int_0^{+\infty} e^{-w^2} dw \right)^2 = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}. \end{aligned}$$

途中で $w = \lambda u^2$ のような変数変換を行っている．この計算の中で， P も固有値も具体的に計算する必要が無いことに注意．

小レポート 11

(1) 問題が生じる箇所は境界 $x^2 + y^2 = 1$ のところ．よって近似する集合列として，
 $B_n = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 - \frac{1}{n}\}$ を取る．このとき，極座標変換を行うと，

$$\begin{aligned} \int_{B_n} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} &= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{1 - \frac{1}{n}} \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = 2\pi \times \frac{1}{2} \int_0^{(1 - \frac{1}{n})^2} \frac{du}{\sqrt{1 - u}} \\ &= -2\pi \left[\sqrt{1 - u} \right]_0^{(1 - \frac{1}{n})^2} = 2\pi \left(1 - \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{n})^2} \right) \end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D_1} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2\pi \left(1 - \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{n})^2} \right) \right) = 2\pi.$$

(2) 問題が生じるのは原点 $(0, 0)$ のみ． $x^2 + y^2$ があるので極座標変換を考えることにする．
 この場合，近似する集合列として $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, $\frac{1}{n} \leq r \leq \frac{1}{\cos \theta}$ が取れる．これを K_n と書くことにすると，

$$\begin{aligned} \int_{K_n} \frac{x + y}{x^2 + y^2} d\mathbf{x} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\int_{\frac{1}{n}}^{\frac{1}{\cos \theta}} \frac{r(\cos \theta + \sin \theta)}{r^2} r dr \right) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left\{ \left(1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \right) - \frac{1}{n}(\sin \theta + \cos \theta) \right\} d\theta \\ &= \left[\theta + \log |\cos \theta| + \frac{1}{n} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{\sqrt{2}n}. \end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D_2} \frac{x + y}{x^2 + y^2} d\mathbf{x} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2 - \frac{1}{\sqrt{2}n} \right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2.$$

(3) D_3 は非有界である所が問題．極座標変換を用いたないので， \mathbb{R}^2 への近似列として円板
 $B_n = \{\sqrt{x^2 + y^2} \leq n\}$ を取る．すると，

$$\begin{aligned} \int_{B_n} \frac{d\mathbf{x}}{(x^2 + y^2 + 1)^2} &= \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^n \frac{r}{(r^2 + 1)^2} dr = 2\pi \times \frac{1}{2} \int_0^{n^2} \frac{du}{(u + 1)^2} \\ &= \pi \times \left[-\frac{1}{u + 1} \right]_0^{n^2} = \pi \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right). \end{aligned}$$

よって，

$$\int_{D_3} \frac{d\mathbf{x}}{(x^2 + y^2 + 1)^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\pi \left(1 - \frac{1}{n^2 + 1} \right) \right) = \pi.$$

演習問題 12

問題 1. (1) 直線 $y = x$ 上で被積分関数が発散するので，そこを避けて積分する． $D_n = \{\frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n}\}$ とおく．

$$I_n = \int_{D_n} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{x - \frac{1}{n}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 - y^2}} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \operatorname{Arcsin} \left(1 - \frac{1}{nx} \right) dx.$$

ここで $u = 1 - \frac{1}{nx}$ と変数変換すれば

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n} \cdot \int_0^{1 - \frac{1}{n}} \frac{\operatorname{Arcsin} u}{(1 - u)^2} du = \frac{1}{n} \cdot \int_0^{1 - \frac{1}{n}} \left(\frac{1}{1 - u} \right)' \operatorname{Arcsin} u du \\ &= \left[\frac{\operatorname{Arcsin} u}{1 - u} \right]_0^{1 - \frac{1}{n}} - \int_0^{1 - \frac{1}{n}} \frac{1}{1 - u} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du. \end{aligned}$$

次に $u = \sin \theta$ と変数変換する．簡単のため $\alpha_n = \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{1}{n})$ とおけば，

$$I_n = \alpha_n - \frac{1}{n} \cdot \int_0^{\alpha_n} \frac{d\theta}{1 - \sin \theta}.$$

三角関数による有理関数の積分なので， $t = \tan \frac{\theta}{2}$ と変数変換することにより計算することができる（詳しくは教科書 p.99 参照）． $\beta_n = \tan \frac{\alpha_n}{2}$ とおく．

$$I_n = \alpha_n - \frac{1}{n} \int_0^{\beta_n} \frac{2 dt}{(1 - t)^2} = \alpha_n - \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{2}{1 - t} \right]_0^{\beta_n} = \alpha_n - \frac{2}{n(1 - \beta_n)} + \frac{2}{n}.$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}$ であるので，あとは第 2 項の収束発散を調べればよい． $\tan x$ の半角公式より

$$\beta_n = \tan \frac{\alpha_n}{2} = \frac{-1 + \sqrt{1 + \tan^2 \alpha_n}}{\tan \alpha_n} = \frac{1 - \cos \alpha_n}{\sin \alpha_n}$$

なので， $\alpha_n = \operatorname{Arcsin}(1 - \frac{1}{n})$ を思い出して，

$$n(1 - \beta_n) = \frac{n(1 - \frac{1}{n} + \sqrt{1 - (1 - \frac{1}{n})^2} - 1)}{1 - \frac{1}{n}} = \frac{-1 + \sqrt{2n - \frac{1}{n}}}{1 - \frac{1}{n}} \rightarrow +\infty.$$

よって $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n(1 - \beta_n)} = 0$ となるので，この広義積分は収束し，その値は

$$\int_D \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\alpha_n - \frac{2}{n(1 - \beta_n)} + \frac{2}{n} \right) = \frac{\pi}{2}.$$

(2) 発散する．解説は教科書 p.206 を参照のこと．

(3) 被積分関数は領域 D (有界閉集合から一点 $(0, 0)$ を除いた領域) で有界な連続関数なので、絶対積分可能であり、特に広義積分可能である。 $D_n = \{\frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ とすれば、

$$\begin{aligned}\int_{D_n} \frac{xy}{x^2 + y^2} d\mathbf{x} &= \int_{D_n} \cos \theta \sin \theta \cdot r dr d\theta = \int_{\frac{1}{n}}^1 r dr \times \int_0^{2\pi} \sin \theta (\sin \theta)' d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \cdot \left[\frac{\sin^2 \theta}{2}\right]_0^{2\pi} = 0.\end{aligned}$$

問題 2. 絶対積分可能でない。実際、 $D_n = \{x^2 + y^2 \leq n\pi\}$ という円で近似することを考える (後の議論を簡単にするためにこの範囲にしている)。このとき、極座標変換、および $u = r^2$ という変数変換により、

$$\int_{D_n} |\sin(x^2 + y^2)| d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^{\sqrt{n\pi}} |\sin r^2| r dr = \pi \int_0^{n\pi} |\sin u| du$$

となる。よって絶対値を付けた積分が収束しないので、絶対積分可能でない。

問題 3. 与えられた等式を $f(x, y) = 1$ と書いたとき、 $\{f(x, y) \leq 1\}$ という領域の面積を求める問題である (一般には、どちらが内側かをちゃんと考えねばならない)。

(1) $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$ は半径 1 の円なので、 π 。計算は省略しても良いだろう。

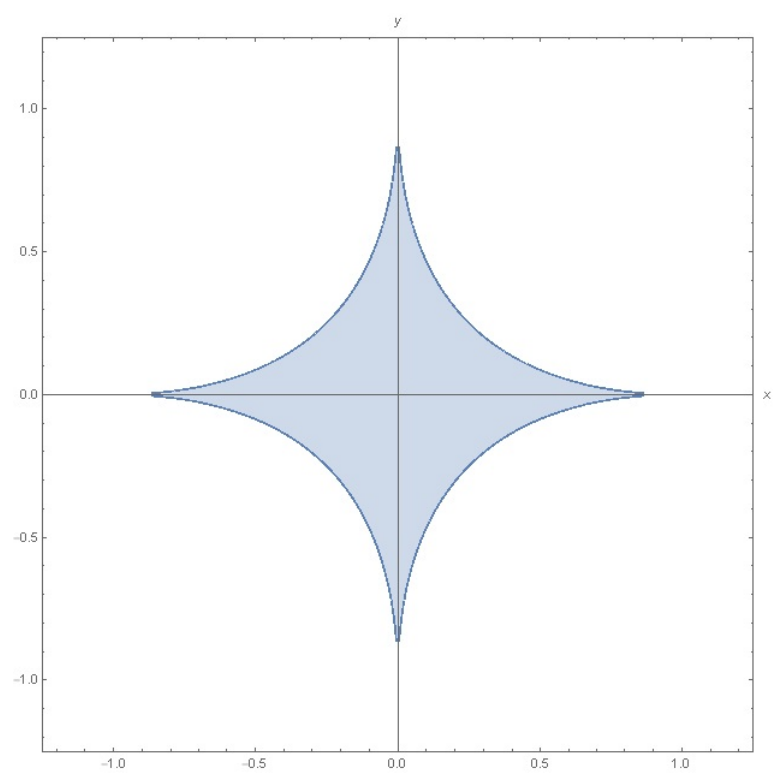
(2) $D = \{ax^2 + by^2 \leq 1\}$. 少し歪ませた極座標変換を用いる: $x = \frac{r \cos \theta}{\sqrt{a}}, y = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{b}}$. すると、 $D' = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ でちょうど求める領域と一致する。この場合、Jacobian は $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = \frac{r}{ab}$ であるので、

$$\int_D 1 \cdot d\mathbf{x} = \int_{D'} \frac{r}{ab} dr d\theta = \frac{1}{ab} \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^1 r dr = \frac{\pi}{ab}.$$

(3) まず $x \geq 0, y \geq 0$ の領域の面積を求め、それを 4 倍する。 $D' = \{(x, y); \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1, x, y \geq 0\}$ とおく。 $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$ と変数変換する。Jacobian は $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = 4uv$ であるので、

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq 1} 1 \cdot d\mathbf{x} &= \int_{u+v \leq 1} 4uv du dv = 4 \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} uv dv \right) du \\ &= 2 \int_0^1 u(1-u)^2 du = \left[\frac{u^2}{2} - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

よって、求める面積は $\frac{2}{3}$ 。



小レポート 12

(1), (2) ともに $D_n = \{1 \leq x, y \leq n\}$ という近似列を取る .

$$(1) \quad \int_{D_n} \frac{d\mathbf{x}}{x^2 y^2} = \int_1^n \frac{dx}{x^2} \times \int_1^n \frac{dy}{y^2} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow +\infty).$$

$$(2) \quad \int_{D_n} \frac{d\mathbf{x}}{\sqrt{xy}} = \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \times \int_1^n \frac{dy}{\sqrt{y}} = 4(\sqrt{n} - 1)^2 \rightarrow +\infty \quad (n \rightarrow +\infty).$$

よって, (1) は収束し, その値は 1, (2) は発散する .

(3) $D' = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ である . 問題が生じるのは直線 $y = x$ 上であるので , そこを避けた領域

$$D'_n = \left\{ (x, y); \frac{1}{n} \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x - \frac{1}{n} \right\}$$

で積分を計算する .

$$\begin{aligned} \int_{D'_n} \frac{d\mathbf{x}}{x-y} &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_0^{x-\frac{1}{n}} \frac{dy}{x-y} \right) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left[-\log(x-y) \right]_0^{x-\frac{1}{n}} dx \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\log x - \log \frac{1}{n} \right) dx = \left[x \log x - x \right]_{\frac{1}{n}}^1 - \left(1 - \frac{1}{n} \right) \log \frac{1}{n} \\ &= \log n + \frac{1}{n} - 1. \end{aligned}$$

よって ,

$$\int_{D'} \frac{d\mathbf{x}}{x-y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D'_n} \frac{d\mathbf{x}}{x-y} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\log n + \frac{1}{n} - 1 \right) = +\infty$$

より, この積分は発散する .

演習問題 13

問題 1. (1) まず極座標変換を施す . $D' = \{(r, \theta, \varphi); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ を (r, θ, φ) の動く範囲とすると ,

$$I = \int_{D'} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta - 2)^2} dr d\theta d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_{D''} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 - 4r \cos \theta + 4} dr d\theta.$$

ここで $D'' = \{(r, \theta); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi\}$ である . 二つ目の等式は , 被積分関数が φ に依存しない関数なので , φ に関する積分は他の変数での積分と独立に計算できることによる . 次に D'' において , θ, r の順に計算することにする . $u = -r \cos \theta$ とすれば , $du = r \sin \theta d\theta$, $u: -r \rightarrow r$ ($\theta: 0 \rightarrow \pi$) なので

$$\begin{aligned} \int_{D''} \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 - 4r \cos \theta + 4} dr d\theta &= \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{r^2 - 4r \cos \theta + 4} d\theta \right) dr \\ &= \int_0^1 \left(\int_{-r}^r \frac{r}{r^2 + 4u + 4} du \right) dr \\ &= \frac{1}{4} \int_0^1 \left[r \log(r^2 + 4u + 4) \right]_{u=-r}^r dr \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 r \log \frac{2+r}{2-r} dr. \end{aligned}$$

ここで , $r = (r^2/2)'$ と思って部分積分することにより ,

$$\begin{aligned} \int_0^1 r \log \frac{2+r}{2-r} dr &= \left[\frac{r^2}{2} \log \frac{2+r}{2-r} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 (-r^2) \left(\frac{1}{2+r} - \frac{1}{2-r} \right) dr \\ &= \frac{1}{2} \log 3 + \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4 - \frac{4}{2+r} - \frac{4}{2-r} \right) dr \\ &= \frac{1}{2} \log 3 + 2 - \left[\log \frac{2+r}{2-r} \right]_0^1 = 2 - \frac{3}{2} \log 3. \end{aligned}$$

以上をまとめると ,

$$I = 2\pi \times \frac{1}{2} \left(2 - \frac{3}{2} \log 3 \right) = 2\pi \left(1 - \frac{3}{4} \log 3 \right).$$

(2) (1) と同じ要領で計算すると,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} d\varphi \times \int_0^1 \left(\int_0^\pi \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{r^2 - 4r \cos \theta + 4}} d\theta \right) dr \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left(\int_{-r}^r \frac{r}{\sqrt{r^2 + 4u + 4}} du \right) dr \\
 &= 2\pi \int_0^1 \left[r \cdot \frac{2}{4} \sqrt{r^2 + 4u + 4} \right]_{u=-r}^r dr \\
 &= \pi \int_0^1 r (|2+r| - |2-r|) dr = \pi \int_0^1 2r^2 dr = \frac{2\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

問題 2. D の定義に誤植があり, 正しくは

$$D = \left\{ (x, y, z); \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \\ x^2 + y^2 \leq 2x, z \geq 0 \end{array} \right\}$$

とすべき問題でした. 前のままでも一応計算できて (1) は $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ です. (2) は非常に複雑になります.

さて, 訂正した方のもので計算を行うことにする. 円柱座標における Jacobian は

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \rho.$$

変数変換したときの動く範囲を考える.

$$\rho^2 + z^2 \leq 4, \quad z \geq 0, \quad \rho^2 \leq 2\rho \cos \varphi \Leftrightarrow \rho \leq 2 \cos \varphi.$$

三番目の条件から, φ を止めておいて ρ を計算したほうが楽そうだと予測できる (先に ρ を止めると逆三角関数が出てくる). ρ よりも先に z を止めると, ρ に関して上から z の関数で抑えることになって, φ によるものとぶつかってしまう. この議論から, 計算する順番は $z \rightarrow \rho \rightarrow \varphi$ がよいと思われる. $x^2 + y^2 \leq 2x$ の図 (教科書 p.194 の図) より, 各変数の動く範囲は次のようになる.

$$-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \cos \varphi, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{4 - \rho^2}.$$

これより計算できる.

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2 \cos \varphi} \left(\int_0^{\sqrt{4 - \rho^2}} z \cdot \rho dz \right) d\rho \right\} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \rho(4 - \rho^2) d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{4\rho^2}{2} - \frac{\rho^4}{4} \right]_{\rho=0}^{2 \cos \varphi} d\varphi \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{4 \cdot 4 \cos^2 \varphi}{2} - \frac{16 \cos^4 \varphi}{4} \right) d\varphi = \frac{1}{2} \left(8 \cdot \frac{\pi}{2} - 4 \cdot \frac{3\pi}{8} \right) = \frac{5\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

ここで次の事実を用いた (教科書 p.116 の問題 5.109 参照) .

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi d\varphi = 2 \cdot \frac{3 \cdot 1 \cdot \pi}{4 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{3\pi}{8}.$$

(2) (1) と同じ要領で計算する .

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \int_0^{2 \cos \varphi} \left(\int_0^{\sqrt{4-\rho^2}} z^2 \cdot \rho dz \right) d\rho \right\} d\varphi \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \left[\frac{z^3}{3} \right]_{z=0}^{\sqrt{4-\rho^2}} d\rho \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2 \cos \varphi} \rho (4 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} d\rho \right) d\varphi = \frac{1}{3} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{2}{5} \cdot (4 - r^2)^{\frac{5}{2}} \right]_{\rho=0}^{2 \cos \varphi} d\varphi \\ &= \frac{32}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \left(\sqrt{\sin^2 \varphi} \right)^{\frac{5}{2}} \right) d\varphi = \frac{32}{15} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - |\sin \varphi|^5) d\varphi \\ &= \frac{2 \cdot 32}{15} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^5 \varphi) d\varphi = \frac{64}{15} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3 \cdot 1} \right) = \frac{32}{225} (15\pi - 16). \end{aligned}$$

(コメント) ここで扱った 3 変数の積分は計算に工夫が必要であり, 少し難易度は高めです. まずは講義中に解いてもらった問題 (1) と (2) を解けるようになってください.

小レポート 13

(1) 積分する区間は例題 13.3 と同じなので，これと同じ累次積分として計算する．この問題における計算のコツは $x + y$ を展開せずにそのまま扱うこと．

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz \right) dy \right\} dx \\
 &= \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} \left[(x+y)z + \frac{z^2}{2} \right]_{z=0}^{1-x-y} dy \right\} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left\{ \int_0^{1-x} (1 - (x+y)^2) dy \right\} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left[y - \frac{1}{3}(x+y)^3 \right]_{y=0}^{1-x} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} - x + \frac{2}{3} \right]_{x=0}^1 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{8}.
 \end{aligned}$$

(2) 3 次元の極座標変換を用いる．Jacobian は例題 13.4 で触れたように $r^2 \sin \theta$ になる．

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{D'} (r \sin \theta \cos \varphi)^2 \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi \\
 &= \int_0^1 r^4 dr \times \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \times \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi \\
 &= \frac{1}{5} \times \frac{4}{3} \times \pi = \frac{4\pi}{15}.
 \end{aligned}$$

ただし， $D' = \{(r, \theta, \varphi); 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ は (r, θ, φ) の動く範囲である．ここで， $u = -\cos \theta$ という変数変換による

$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - u^2) du = 2 \left[u - \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = \frac{4}{3},$$

および $\int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi$ より

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi \right) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi = \pi$$

であることを用いた．