

1 多変数関数における微分

後期は多変数関数の微分と積分を扱う。講義では主に2,3変数関数のみを扱うことになるが、基本的にはそのまま n 変数関数に拡張できる。

キーワードは、偏微分・全微分、連鎖律、条件付き極値問題、重積分、多変数における変数変換公式。

前半は微分を扱う。1変数のとき、微分は次の極限 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ により定義された。さらに極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha$ は、次のように ε - δ 論法によって定義されていた。

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon.$$

よって、まずはこれを多変数に拡張する必要がある。

1.1 数ベクトル

$\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{x} = (x, y); x, y \in \mathbb{R}\}$ は2次元の数ベクトル空間、 $\mathbb{R}^3 = \{\mathbf{x} = (x, y, z); x, y, z \in \mathbb{R}\}$ は3次元の数ベクトル空間 \mathbb{R}^3 を表す。また、零ベクトルは $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ と表す。

定義 1.1. $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^3$ に対して $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}' := xx' + yy' + zz'$ を内積、 $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ をノルムという。

$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$ が成り立っていることに注意。

命題 1.2. (1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$. 特に $\|\mathbf{x}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$, (2) $\|\alpha \mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$, (3) $\|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|$ (Schwartz の不等式), (4) $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (三角不等式)。

(証明略)

1.2 多変数関数の極限

定義 1.3. 2変数関数 $f(x, y)$ に対し $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = \alpha$ を、

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ s.t. } 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - \alpha| < \varepsilon$$

により定義する。

定義自体は1変数のときと大差がないが、その振る舞いは大きく異なる。それは $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ に至る道筋が無数にあり、そのすべてで同一の極限になっていることが要請されているためである。

例題 1.4. 次の極限を求めよ。

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^2 + y^2}$$

(考え方) 一般には極座標変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ を用いる。分子、分母ともに同次式ならば予想を立てやすい。(解答略)

(コメント) 分子、分母ともに同次式のときは $\Delta = (\text{分子の次数}) - (\text{分母の次数})$ を考えればよい。一般には $\Delta > 0$ ならば0に収束、 $\Delta \leq 0$ ならば収束しない。

注意 1.5. 極座標変換において、例えば $\theta = \text{Arcsin } r$ のように、 θ は r の関数になっている可能性がある*1。

定義 1.6. (1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ のとき、 $f(x)$ が点 a で連続という。(2) また、 $f(x)$ が集合 A の各点で連続であるとき、 $f(x)$ は A で連続という。

1.3 偏微分

定義 1.7. 2変数関数 $f(x, y)$ において、 y を定数と思って x で微分することを、 x に関して偏微分するといい、

$$f_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$$

などを書く。 y に関する偏微分も同様に定義される。

例題 1.8. $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 3y^2$ を、 x, y に関して偏微分せよ。

(解) $f_x(x, y) = 3x^2 + y^2, f_y(x, y) = 2xy - 6y$ 。

(コメント) 偏微分は、実際には1変数の微分と何ら変わらない。

注意 1.9. 1変数の場合だと「微分可能ならば連続」であったが、多変数だと偏微分可能であっても連続であるとは限らない。例えば $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} (x \neq 0), f(0, 0) = 0$ がその例を与える。実際、原点での偏微分は簡単な計算から $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$ であるので*2、 $f(x, y)$ は原点において偏微分可能である。しかしながら、 $f(x, y)$ において極座標変換を考えると、

$$\frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{r^2 \cos \theta \sin \theta}{r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)} = \cos \theta \sin \theta$$

となり、 $f(x, y)$ は原点で連続でない。

まとめ (1) 多変数の極限は1変数と場合と振る舞いが大きく異なる。(2) 「偏微分」の導入。(3) 偏微分は1変数における微分の多変数化とは言えない(注意 1.9 より)。

*1 もちろん、必ずそうになっているわけではない。重要なのは、 θ は固定されているわけではないということである。

*2 実際に計算してみること。

演習問題 1

問題 1 命題 1.2 を証明せよ .

問題 2 次の関数 $f(x, y)$ について $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ を調べよ .

$$\begin{array}{ll} (1) \frac{x-y}{x+y} & (2) \frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2} \\ (3) \frac{x-y^2}{x^2-y} & (4) \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

問題 3[†] 次の極限を調べよ .

$$\begin{array}{l} (1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(x^2+xy+y^2)^{3/2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{array}$$

問題 4 $(x, y) = (0, 0)$ のときは $f(0, 0) = 0$ で , $(x, y) \neq (0, 0)$ のときは次式で定義される関数 $f(x, y)$ の , $(x, y) = (0, 0)$ における $f(x, y)$ の連続性を調べよ .

$$(1) \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \quad (2) xy \log(x^2 + y^2)$$

問題 5[†] 次の関数の x, y に関する偏微分を計算せよ .

$$\begin{array}{l} (1) f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \sin(x^2 + y^2) \\ (2) g(x, y) = x^y y^x \\ (3) h(x, y) = \log(x^2 + y^2 - xy) \end{array}$$

問題 6[†] 次の関数 $f(x, y)$ の原点における偏微分係数

$f_x(0, 0)$, $f_y(0, 0)$ を求めよ .

$$\begin{array}{l} (1) f(x, y) = \sqrt{|xy|} \\ (2) f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ (3) f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad f(0, 0) = 0. \end{array}$$

この微分積分学 A・B の講義の目標は , 多変数関数の微分・積分を自在に扱えるようになることです . 後期は , その主題である多変数関数を扱っていきます . 当然ながら , その基礎には 1 変数関数の微分積分学がありますので , しっかりと復習し , きちんとできるようになっておいてください .

この場所では講義の要約や補足 , あるいは関連する話題を取り留めもなく書いていくつもりです . 必ずしも役に立つ情報があるとは限りませんが , 一読いただけますと幸いです .

小レポート

(1) 次の関数の $x = 0$ における Taylor 展開を , 最初の 4 項目まで書き下せ . ただし , $\alpha \in \mathbb{R}$ である .

$$e^x, \quad \sin x, \quad \cos x, \quad \log(1+x), \\ \operatorname{Arctan} x, \quad \operatorname{Arcsin} x, \quad (1+x)^\alpha.$$

(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ を次で定める .

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (x \neq 0), \quad f(0, 0) = 0.$$

(i) $f(x, y)$ の x, y に関する偏微分をそれぞれ計算せよ . (ii) 直線 $y = x$ 上から点が 0 に近づくときの極限值を求めよ . (iii) 直線 $y = -x$ 上から点が 0 に近づくときの極限值を求めよ .

注意 . (i) $(x, y) = (0, 0)$ かどうかで場合分けが必要 . (ii) $(x, y) = (h, h)$ として $h \rightarrow 0$ を考えたときの $f(x, y)$ の極限を求めよ , ということ . (iii) も同様である .

小レポートについて . 次回の講義の際に提出すること . 原則として期限を過ぎての提出は認めないが , やむを得ない事情がある際は , 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること .

2 多変数関数の全微分

前回は偏微分 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ を導入したが、これらは1変数関数の微分の多変数化とはいえなかった。偏微分でうまくいかない理由は x 軸, y 軸の所しか見ていないからである。今回は1変数関数の微分の多変数版を紹介する。
1変数の場合 $x = a$ における Taylor 展開は $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$ であった。少し言い換えると「 f が微分可能ならば、 $y = f(x)$ は $x = a$ の近くで直線により近似できる」となる。式で書けば、

$$\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - \{f(a) + f'(a)(x-a)\}}{x-a} \right| = 0.$$

逆に $\lim_{x \rightarrow a} \left| \frac{f(x) - \{f(a) + A(x-a)\}}{x-a} \right| = 0$ となる定数 A が存在するならば $f(x)$ は $x = a$ で微分可能で $A = f'(a)$ となる。これを多変数に拡張する。

2.1 全微分

前述のように1変数の場合は直線で近似した。同様に考えると2変数の場合は平面で近似することになる。

定義 2.1. 3次元空間において、点 (a, b, c) で x 方向に A_x , y 方向に A_y の傾きを持つ平面の方程式は $z = c + A_x(x-a) + A_y(y-b)$ で表される。 $a = (a, b)$, $A = (A_x, A_y)$ とすれば $z = c + A \cdot (x-a)$ とかける。

定義 2.2. f が点 a において全微分可能とは、

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|f(x) - \{f(a) + A_x(x-a) + A_y(y-b)\}|}{\|x-a\|} = 0$$

となる $A = (A_x, A_y)$ が存在すること。

注意 2.3. つまり、 f が全微分可能であるとは、 x が a に近いときに f が平面 $z = f(a) + A \cdot (x-a)$ で近似できることをいう。この平面を接平面という。

命題 2.4. f が点 a で全微分可能ならば、 f は点 a で (1) 連続であり、さらに (2) 偏微分可能で $A_x = f_x(a)$, $A_y = f_y(a)$ となる。

注意 2.5. 全微分が、1変数関数の微分の多変数版というべきものである。

定義 2.6. $\nabla f(a) := (f_x(a), f_y(a))$ を f の点 a における勾配 (gradient) という^{*1}。

勾配 ∇f はベクトルであり、これを使えば接平面は $z = f(a) + \nabla f \cdot (x-a)$ とかける。このように、勾配は微分係数の多変数版である。

例題 2.7. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ の点 (a, b) での勾配を計算し、この点における接平面を求めよ。

(考え方) 勾配 $\nabla f(a)$ は f_x, f_y を計算すればよい。接平面は公式 $z = f(a) + f_x(a)(x-a) + f_y(a)(y-b)$ に必要な値を代入する。

定義 2.8. f が x, y について偏微分可能であり f_x, f_y がともに連続であるとき、 f は C^1 級という。

定理 2.9. f が C^1 級ならば、 f は全微分可能である。

例題 2.10. $f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$ が \mathbb{R}^2 の各点で全微分可能であることを示せ。

(考え方) f_x, f_y を計算し、そのどちらも連続であることを確認すればよい (定理 2.9)。

(証) $f_x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$, $f_y(x, y) = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ より。

2.2 高階偏微分

偏微分についても高階のものを考えられる。例えば、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (f_x)_x = f_{xx}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = (f_x)_y = f_{xy}. \end{aligned}$$

例題 2.11. $f(x, y) = x^3 + xy^2 - 3y^2$ の2階偏導関数をすべて求めよ。

定義 2.12. (1) f の k 階までの偏導関数がすべて存在して連続であるとき f を C^k 級, (2) 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して C^k 級となるときは C^∞ 級の関数, (3) 文脈に応じて必要なだけ偏微分可能のときにはなめらかという。

定理 2.13. f が C^2 級^{*2}ならば、 $f_{xy} = f_{yx}$ 。

つまり、偏微分の順番に依らずに、どの変数で何回微分したかということが決まる。

注意 2.14. 一般には $f_{xy} \neq f_{yx}$ であることに注意。

まとめ (1) 1変数関数の微分の多変数化は「全微分」。(2) 接平面と高階偏微分の定義。(3) 関数がなめらかならば、偏微分の順番は自由に入れ替えられる。

10月17日。

^{*1} ∇ はナブラと読む。竖琴のギリシャ語名に由来するらしい。

^{*2} またはなめらかでもよい。

演習問題 2

問題 1. 次の関数は原点で全微分可能かどうか調べよ .

$$(1) \quad f(x, y) = x^3 + 3x^2y + 3y^3,$$

$$(2) \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

問題 2. 定理 2.9 の逆は成立しない (f_x, f_y がともに不連続であるが f は全微分可能) ことを, 次の例によって確認せよ (教科書の問題 6.20) .

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2+y^2} & (x \neq 0), \\ 0 & (x = 0). \end{cases}$$

問題 3.[†] 次の関数に対して, (i) 原点で全微分可能であることを示せ, (ii) 原点における接平面を求めよ .

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y,$$

$$g(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},$$

$$h(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

問題 4.[†] 次の関数に対して, (i) 点 (x, y) における勾配を求めよ, (ii) 2 階偏導関数をすべて求めよ .

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y,$$

$$g(x, y) = \operatorname{Arctan} \frac{y}{x},$$

$$h(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 - y^2}}.$$

問題 5.* 次の関数 $f(x, y)$ について, $f_{xy}(0, 0), f_{yx}(0, 0)$ を求めよ .

$$f(x, y) = xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \quad f(0, 0) = 0.$$

多変数関数では, 「偏微分」と「全微分」という 2 種類の微分が出てきて紛らわしいですが, これは微分が「傾き」を表す量であることを考えると, 仕方のない事です . 変数が増えたことにより, 各座標軸方向の「傾き」が現れます (偏微分) . しかし, 偏微分可能であっても, その点で連続にならないという不都合が生じるので, より強い概念が必要になってきます . それが全微分です .

大雑把なイメージとしては, 全微分は平面による近似で, 偏微分はその平面の各座標軸方向の傾きです .

小レポート

(1) 次の関数の n 階導関数を求めよ .

$$(i) \sin x \quad (ii) \frac{1}{x+1} \quad (iii) e^{2x}$$

$$(iv) e^x \sin x \quad (v) \sin^3 x$$

(2) 2 変数関数 $f(x, y)$ を次で定義する .

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad (x^2 + y^2 < 1).$$

- (i) $f(x, y)$ は各点で全微分可能であることを示せ .
- (ii) $f(x, y)$ の 2 階偏導関数をすべて求めよ .
- (iii) $a^2 + b^2 < 1$ をみたす a, b に対して $f(x, y)$ の点 (a, b) における接平面の方程式を求めよ .

注意 . (1) (iv) は三角関数の加法定理 $\sin(x + \theta) = \sin x \cos \theta + \cos x \sin \theta$ をうまく使って, 帰納法に持ち込む . (v) は三倍角の公式を利用する . (2) (i) は定理 2.8 を用いる . (ii) は $f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ をすべて計算する . (iii) 接平面の公式を用いる .

小レポートについて . 次回の講義の際に提出すること . 原則として期限を過ぎての提出は認めないが, やむを得ない事情がある際は, 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること .

3 合成関数の微分

二つの関数 f, g が与えられたとき, これらの合成関数とは $(f \circ g)(x) := f(g(x))$ のことで, その微分は

$$\frac{d}{dx} \{f(g(x))\} = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

によって与えられた. 本節ではこの合成関数の微分を多変数の場合へ一般化する. 考える関数は全てなめらかとし, 変数の数によって場合を分けて考える.

3.1 1 変数 + 2 変数

1 変数関数 $f(t)$ と 2 変数関数 $g(x, y)$ が与えられたとき, 合成関数 $F(x, y) := f(g(x, y))$ について考える.

命題 3.1. $F(x, y)$ は x, y に関して偏微分可能で,

$$\begin{aligned} F_x(x, y) &= f'(g(x, y)) \cdot g_x(x, y), \\ F_y(x, y) &= f'(g(x, y)) \cdot g_y(x, y). \end{aligned}$$

ベクトル表記は $\nabla F(x, y) = f'(g(x, y)) \nabla g(x, y)$.

3.2 2 変数 + 1 変数

2 変数関数 $f(x, y)$ において, 変数 x, y がそれぞれ t に関する関数 $x = x(t), y = y(t)$ になっているとする. このとき, 合成関数 $F(t) := f(x(t), y(t))$ について考える. 見易くするために, $x(t) = (x(t), y(t))$ とおく.

命題 3.2. $F(t) = f(x(t))$ は t に関する 1 変数関数で

$$\frac{dF}{dt}(t) = f_x(x(t)) x'(t) + f_y(x(t)) y'(t).$$

$x'(t), y'(t)$ は t に関する導関数. $x'(t) = (x'(t), y'(t))$ とおくと, ベクトル表記は $\nabla f(x(t)) \cdot x'(t)$.

3.3 連鎖律

2 変数関数 $f(x, y)$ において, 変数 x, y が其々 u, v に関する 2 変数関数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ になっているとする. 見易くするために, $x(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ とおく. このとき, 合成関数 $F(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$ について考える. $u = (u, v)$ とする.

定理 3.3. $F(u) = f(x(u))$ は u, v に関し偏微分可能で

$$\begin{aligned} F_u(u, v) &= f_x(x(u, v))x_u(u, v) + f_y(x(u, v))y_u(u, v), \\ F_v(u, v) &= f_x(x(u, v))x_v(u, v) + f_y(x(u, v))y_v(u, v). \end{aligned}$$

変数 u, v に関する勾配を ∇_u とすれば, ベクトル表記は

$$\nabla_u F(u) = \nabla_x f(x(u)) \cdot \nabla_u x(u).$$

注意 3.4. この性質は連鎖律と呼ばれる. 次のように書けば印象的である. 引数は適切に補うこと.

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

3.4 座標変換

連鎖律は座標変換を行うときに必要になる.

定義 3.5. \mathbb{R}^2 において, 変換 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ($r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi)$) を極座標変換という.

例題 3.6. $f(x, y)$ に対して $F(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とするとき, 次を示せ^{*1}.

$$\begin{aligned} F_r(r, \theta) &= f_x \cdot \cos \theta + f_y \cdot \sin \theta, \\ F_\theta(r, \theta) &= -f_x \cdot r \sin \theta + f_y \cdot r \cos \theta. \end{aligned}$$

(考え方) 連鎖律を用いる.

注意 3.7. 座標変換する際に, 従属変数を設定して $z = f(x, y) = F(r, \theta)$ とすると, $f_x = z_x, F_r = z_r$ などのように書けるので考えやすい. たとえば,

$$z_r = \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} = z_x x_r + z_y y_r \quad \text{etc.}$$

極座標変換において, r, θ を x, y の関数と見ることも多い. 簡単な計算から $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \tan \theta = \frac{y}{x}$ であるので, r_x, r_y や θ_x, θ_y も計算できる.

$$r_x = \cos \theta, \quad r_y = \sin \theta, \quad \theta_x = -\frac{\sin \theta}{r}, \quad \theta_y = \frac{\cos \theta}{r}.$$

例題 3.8. 例題 3.6 と同様の仮定の下で次を示せ.

$$(f_x)^2 + (f_y)^2 = (F_r)^2 + \frac{1}{r^2} (F_\theta)^2.$$

(考え方) 連鎖律を利用する.

(略解) $z = f(x, y) = F(r, \theta)$ とおけば, 連鎖律から

$$\begin{aligned} z_x &= z_r r_x + z_\theta \theta_x = z_r \cos \theta - z_\theta \frac{\sin \theta}{r}, \\ z_y &= z_r r_y + z_\theta \theta_y = z_r \sin \theta + z_\theta \frac{\cos \theta}{r}. \end{aligned}$$

なので, $(z_x)^2 + (z_y)^2 = (z_r)^2 + \frac{1}{r^2} (z_\theta)^2$ を得る.

定義 3.9. 3 次元空間の極座標変換は次で与えられる.

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta.$$

ここで, $r \geq 0, \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi)$ である. 幾何学的意味は教科書 p.138 の図を参照のこと.

まとめ (1) 多変数関数の合成関数の微分は「連鎖律」を用いて計算する. (2) 2 次元, 3 次元空間の極座標変換.

^{*1} f_x, f_y は引数 $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を省略している. 引数を書くとのみ出してしまったため.

演習問題 3

問題 1. $z = f(x, y)$, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき, 次式の独立変数 x, y を, r, θ に書き換えよ^{*1}.

$$(1) \quad z_x^2 + z_y^2 \quad (2) \quad z_{xx} + z_{yy}$$

問題 2. α を定数とし, $z = f(x, y)$ とおく. ここで $x = \xi \cos \alpha - \eta \sin \alpha$, $y = \xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha$ とするとき, 次式を証明せよ.

$$(1) \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$(2) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2}$$

問題 3.[†] $z = f(x, y)$, $x = e^u \cos v$, $y = e^u \sin v$ のとき, 次式を証明せよ.

$$z_{xx} + z_{yy} = e^{-2u}(z_{uu} + z_{vv}).$$

問題 4. $z = f(x, y)$, $x = \cosh u \cos v$, $y = \sinh u \sin v$ のとき, 次式を証明せよ.

$$z_{xx} + z_{yy} = \frac{\cosh 2u - \cos 2v}{2}(z_{uu} + z_{vv}).$$

問題 5.[†] $z = f(x, y)$, $x = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2}$, $y = \frac{\eta}{\xi^2 + \eta^2}$ のとき, 次式を示せ.

$$(x^2 + y^2)(z_{xx} + z_{yy}) = (\xi^2 + \eta^2)(z_{\xi\xi} + z_{\eta\eta}).$$

本日扱った連鎖律は, 多変数関数の微積分を扱う上で非常に重要なものです. この講義では扱いませんが, 偏微分方程式というものがあります. たとえば, 時間 t と空間上の点 (x, y, z) に関する関数 $\varphi(x, y, z; t)$ に対して, 次の方程式

$$\varphi_{tt} = c^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) \quad (c \text{ は定数})$$

は波動方程式と呼ばれ, 振動, 音, 光や電磁波など振動・波動現象を記述するにあたって基本となる方程式です. こういった方程式を解く際に, 変数変換をする必要が生じることもあり, そのようなときに連鎖律が必要になってきます. 因みに, Fourier 変換や Laplace 変換というものは, このような (偏) 微分方程式を解くための手段として非常に強力です.

小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ.

$$f_1(x) = \frac{1}{\sin x}, \quad f_2(x) = \frac{\sin x - \cos x}{\sin x + \cos x},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{1 + \tan x}, \quad f_4(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(2) $f(x, y)$ を C^1 級の 2 変数関数とし, $F(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ とする. このとき,

$$f_{xx} + f_{yy} = F_{rr} + \frac{1}{r}F_r + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}$$

成り立つことを示せ.

注意. (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ または $t = \tan x$ と変数変換.

(2) $z = f(x, y) = F(r, \theta)$ とし, 連鎖律を用いる.

小レポートについて. 次回の講義の際に提出すること. 原則として期限を過ぎての提出は認めないが, やむを得ない事情がある際は, 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること.

レポート課題

空間の極座標変換について, 次の問いに答えよ.

(1) r, θ, φ を x, y, z の関数と見て, それぞれに関する偏導関数を求めよ. (2) 三変数関数 $f(x, y, z)$ を極座標変換したものを $F(r, \theta, \varphi)$ と書く. このとき, 次が成り立つことを, 円柱座標を経由せずに^{*1} 示せ. $\Delta f := f_{xx} + f_{yy} + f_{zz}$ としたとき,

$$\Delta f = F_{rr} + \frac{2}{r}F_r + \frac{1}{r^2} \left(F_{\theta\theta} + \frac{1}{\tan \theta}F_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta}F_{\varphi\varphi} \right)$$

注意. (1) 合わせて $3 \times 3 = 9$ 個ある. (2) θ に関するものが煩雑になる. 丁寧に, 要領よく計算しないと計算ミスをしてしまう.

提出について. レポートの形式は自由だが, 丁寧に作成すること. 提出期限は 11 月 21 日の講義まで. 途中まででも良いので, 自力で, できるところまで計算すること. くれぐれも他人の計算を丸写しなどはしないように.

^{*1} 教科書の解法は円柱座標を経由するものである.

^{*1} つまり, 連鎖律を使って, r, θ および z_r, z_θ などを使って表す.

4 写像の微分と逆写像定理

例題 4.1 (前回の復習). \mathbb{R}^3 における極座標変換は $x = r \sin \theta \cos \varphi$, $y = r \sin \theta \sin \varphi$, $z = r \cos \theta$ で与えられた. ただし, $r \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ である. このとき, r, θ, φ を x, y, z を用いて表せ.

4.1 写像の微分

$f(x, y)$ を 2 変数関数とし, x, y がそれぞれ u, v の関数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ になっているとする. このとき, 合成関数 $F(u, v) := f(x(u, v), y(u, v))$ の偏微分は連鎖律によって計算できる. ベクトルを用いて記述すれば

$$\nabla F(\mathbf{u}) = \nabla_x f(\mathbf{x}(\mathbf{u})) \cdot \begin{pmatrix} x_u(\mathbf{u}) & x_v(\mathbf{u}) \\ y_u(\mathbf{u}) & y_v(\mathbf{u}) \end{pmatrix}$$

とかけると, 1 変数での合成関数の微分の公式と比べれば, 変換 $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ の微分は行列になると考えられる.

定義 4.2. 2 つの 2 変数関数 $f(x, y)$, $g(x, y)$ を並べたもの $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ を, \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^2 への写像という.

定義 4.3. 次の行列 $J_F(x)$ を, 写像 F の Jacobi 行列という^{*1}. これは導関数の写像版である.

$$J_F(x) := \begin{pmatrix} f_x(x) & f_y(x) \\ g_x(x) & g_y(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f(x) \\ \nabla g(x) \end{pmatrix}.$$

注意 4.4. 極座標変換などの変換は写像の一種である.

例題 4.5. 極座標変換 $F(r, \theta) := (r \cos \theta, r \sin \theta)$ に対し, その Jacobi 行列を求めよ.

注意 4.6. $\det J_F(x)$ は Jacobian と呼ばれ, 多変数関数の積分において重要な役割を果たす. 例題 4.5 の F では $\det J_F(r, \theta) = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$ となる.

4.2 行列による写像

定義 4.7. A を 2 次正方行列とし, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき, $(x, y) \mapsto (x, y)A$ を線形写像, $(x, y) \mapsto (a, b) + (x, y)A$ をアフィン写像という.

「写像」は \mathbb{R}^2 内の図形を変形させる. ここでは, 線形写像によって正方形がどのように変形するかを考察する. 線形写像は「真っ直ぐなものを真っ直ぐなものにう

つす写像」であることを踏まえると, 2 点 $(1, 0)$, $(0, 1)$ について調べるだけで十分である. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすると,

$$(1, 0) \mapsto (a, b), \quad (0, 1) \mapsto (c, d)$$

なので, 一般には 2 ベクトル (a, b) , (c, d) を辺とする「平行四辺形」になる. A を変えることにより, 様々な変換を作ることができる. また, この平行四辺形の面積は $|\det A|$ になる.

4.3 逆写像定理

線形 (アフィン) 写像は次の意味で基本的な写像である: $F(x, y) = (f(x, y), g(x, y))$ において, $f(x, y)$, $g(x, y)$ を平面で近似したものを考えると,

$$F(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = F(\mathbf{a}) + \mathbf{h} \cdot {}^t J_F(\mathbf{a}) + o(\|\mathbf{h}\|)$$

となることがわかる. つまり, 写像の主要部に, Jacobi 行列を係数行列に持つアフィン写像が現れる.

定理 4.8 (逆写像定理). なめらかな写像 $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ は, 点 \mathbf{a} において $J_F(\mathbf{a}) \neq 0$ であるとする. このとき, (i) 点 $F(\mathbf{a})$ の近くで F の逆写像 F^{-1} が存在する:

$$F^{-1}(F(\mathbf{x})) = \mathbf{x}, \quad F(F^{-1}(\mathbf{u})) = \mathbf{u}.$$

(ii) $\mathbf{u} = F(\mathbf{x})$ とすれば $J_{F^{-1}}(\mathbf{u}) = (J_F(\mathbf{x}))^{-1}$ が成り立つ.

注意 4.9. この定理は 1 変数関数 $y = f(x)$ において, $f'(a) \neq 0$ ならば $x = a$ の近くで逆関数 $x = f^{-1}(y)$ を持つことと対応している.

例題 4.10. $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ のとき, $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$ を求めよ.

(考え方) $(x, y) = F(r, \theta) \Leftrightarrow (r, \theta) = F^{-1}(x, y)$ より, まず $J_F(x, y)$ を求め, 次にその逆行列を計算する.

4.4 写像の合成

二つの写像 $F, G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ があったとき, これらを合成して得られる写像 $H(\mathbf{u}) := F(G(\mathbf{u}))$ について考える. $H(\mathbf{u})$ の各成分の関数において, 連鎖律を適用することにより, 次の結果を得る.

$$J_H(\mathbf{u}) = J_F(G(\mathbf{u})) \cdot J_G(\mathbf{u}).$$

まとめ (1) 写像の微分は Jacobi 行列. (2) 変換における Jacobi 行列の計算では, 逆写像定理の (ii) が使える.

演習問題 4

問題 1.[†] 次の変換における Jacobi 行列とその Jacobian を計算せよ．ただし， $\alpha \in \mathbb{R}$ は定数とする．

$$(1) \mathbf{F}(x, y) = (x, y) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$(2) \mathbf{F}(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$$

$$(3) \mathbf{F}(x, y) = (\cosh x \cos y, \sinh x \sin y)$$

$$(4) \mathbf{F}(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2} \right)$$

問題 2.[†] 問題 1 の変換の逆変換に関する Jacobi 行列を求めよ．

問題 3. 2 次正方行列 A とベクトル (a, b) をとる．このとき，アフィン変換に関する Jacobi 行列とその Jacobian を計算せよ．

$$\mathbf{F}(x, y) = (a, b) + (x, y)A.$$

問題 4.* 単位正方形を 2 次正方行列 A で変形して得られる平行四辺形の面積が $|\det A|$ になることを示せ．

問題 5.* 単位立方体を 3 次正方行列 A で変形して得られる図形は平行六面体になる．この平行六面体の体積が $|\det A|$ になることを示せ．

行列が出てきたので，関連する話題を少し．2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る方程式は，行列式の性質を思い出せば，次のように書けることがわかります：

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & x_2 \\ y & y_1 & y_2 \end{pmatrix} = 0.$$

また，3 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ を頂点とする三角形の面積を計算すると，実は

$$\frac{1}{2!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix} \right|$$

になります．興味がある人は各自確かめてください．より一般の n 次の多面体についても同様の公式が成り立ちます．

小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ．

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad f_2(x) = \frac{2x}{x^2 + 1},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

(2) $\mathbf{F}: (r, \theta, \varphi) \mapsto (x, y, z)$ を空間の極座標変換とする．(i) \mathbf{F} の Jacobi 行列 $J_{\mathbf{F}}(r, \theta, \varphi)$ とその Jacobian を計算せよ．(ii) \mathbf{F} の逆変換 $\mathbf{F}^{-1}: (x, y, z) \mapsto (r, \theta, \varphi)$ の Jacobi 行列 $J_{\mathbf{F}^{-1}}(x, y, z)$ を求めよ．

注意．(1) f_2 以外は逆三角関数，双曲線関数に関する積分である．(2) (ii) $J_{\mathbf{F}}(r, \theta, \varphi)$ の逆行列を計算すればよいが，各成分が関数なので，余因子を用いる計算法が有効である．検算を忘れずに．

小レポートについて．次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること．

5 多変数関数の Taylor 展開と極値

なめらかな 1 変数関数は「多項式で近似」することができた．本節では，これを多変数の場合へ一般化する．

5.1 Taylor 展開

定義 5.1. $v \in \mathbb{R}^2$ ($v \neq 0$) に対して，

$$(D_v f)(a) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

が存在するとき，これを点 a における f の v 方向の微分という．

注意 5.2. 関数に作用して別の関数に変化させるものを作用素というが，この D_v は作用素の一種である．

補題 5.3. $v = (v_1, v_2)$ とすると $D_v f = v_1 \frac{\partial f}{\partial x} + v_2 \frac{\partial f}{\partial y}$ ．

$D_v^2 f = D_v(D_v f)$ のようにして計算する．例えば

$$D_v^2 f = v_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2v_1 v_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + v_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

定理 5.4 (Taylor の定理). $n \in \mathbb{N}$ とする．なめらかな 2 変数関数 $f(x, y)$ に対して，次が成り立つ．

$$f(a + h) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} (D_h^k f)(a) + o(\|h\|^n)$$

これを $f(x)$ の点 a における n 次の Taylor 展開という．

注意 5.5. $h = (h_1, h_2)$ とすれば， $D_h^k f(a)$ は h_1, h_2 に関する k 次同次の多項式になる．つまり，なめらかな多変数関数は (多変数の) 多項式によって近似できる．

$f(x)$ の点 a における 2 次の Taylor 展開は

$$f + \nabla f \cdot h + \frac{1}{2} (h_1, h_2) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o$$

と書ける^{*1}．ここで現れる行列が，1 変数関数における 2 階導関数に対応するものである．

定義 5.6. 対称行列 $H_f(x) := \begin{pmatrix} f_{xx}(x) & f_{xy}(x) \\ f_{xy}(x) & f_{yy}(x) \end{pmatrix}$ を関数 $f(x)$ の Hesse 行列という．

例題 5.7. $f(x, y) = \sin(x + y)$ の，原点 $(0, 0)$ における 3 次の Taylor 展開を求めよ．

(考え方) 1 変数関数の Taylor 展開を利用する．解答略．

5.2 多変数関数の極値

定義 5.8. 2 変数関数 $f(x, y)$ に対し，点 a に十分近いところでは常に $f(a) > f(x)$ をみたすとき極大，常に $f(a) < f(x)$ をみたすとき極小という．2 つを合わせて極値といい，また等号を許すときは広義の極値という．

1 変数のとき $x = a$ が極値ならば $f'(a) = 0$ であり，さらに極大 $\Leftrightarrow f''(a) < 0$ ，極小 $\Leftrightarrow f''(a) > 0$ であった．ここで $f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + o(h^2)$ であることを思い出そう．極値であることの必要条件は Taylor 展開の 1 次の項の係数が関係しており，極大極小の情報は 2 次の項が関係している．

定義 5.9. $\nabla f(a) = 0$ となる a を f の停留点という^{*2}．

命題 5.10. $f(x)$ が点 a で広義の極値ならば， a は f の停留点である．

注意 5.11. 停留点は極値の候補を与えるが，必ずしも極値になるとは限らない．また， $f(x, y) = x^2 - y^2$ のように，1 変数では見られなかった現象も起きようになる．実際， $f_x = 2x$ ， $f_y = -2y$ なので停留点は原点のみ．この関数は原点において， x 軸上では極小になるが， y 軸上では原点は極大になる^{*3}ので， $f(x)$ は極値を持たない．実は Hesse 行列を調べることで極値を判定できる．

定義 5.12. 対称行列 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して，

- (1) 正定値 \Leftrightarrow 固有値がすべて正 $\Leftrightarrow a > 0, \det T > 0$
- (2) 負定値 \Leftrightarrow 固有値がすべて負 $\Leftrightarrow a < 0, \det T > 0$
- (3) 不定符号 \Leftrightarrow 正負の固有値を持つ $\Leftrightarrow \det T < 0$

定理 5.13. f の停留点 a に対して，(1) $H_f(a)$ が正定値 \Leftrightarrow 点 a で極小，(2) $H_f(a)$ が負定値 \Leftrightarrow 点 a で極大，(3) $H_f(a)$ が不定符号 \Leftrightarrow 点 a は鞍点となる．ただし， $\det H_f(a) = 0$ のときは何もわからない．

例題 5.14. $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$ の極値を求めよ．

(考え方) まず $\nabla f(x) = 0$ ($f_x = f_y = 0$) を解き，極値の候補 (停留点) を求める．そして，それらの各点に対して $H_f(a)$ を調べ，判定する．解答略．

まとめ (1) なめらかな多変数関数は Taylor 展開を持つ．(2) 多変数関数の極値問題では 1 変数にはなかった現象 (鞍点) が起こる．(3) 極値判定には Hesse 行列を使う．

11 月 7 日．

^{*1} スペースの関係で引数 (a) を省略している．また o は $o(\|h\|^2)$ の略である．

^{*2} つまり $f_x(a) = f_y(a) = 0$ となる点．

^{*3} このような点を鞍点という．

演習問題 5

問題 1. 次の関数の原点における Taylor 展開を, 4 次の項まで求めよ.

$$(1) e^x \log(1+y) \quad (2) e^{2x} \cos x$$

$$(3) \sqrt{1-x^2-y^2} \quad (4) \sin x \cos y$$

問題 2.[†] 次の関数の停留点を求めよ. また, Hesse 行列も求め, その行列式を計算せよ.

$$(1) x^3 + y^3 - 3axy \quad (a \in \mathbb{R}) \quad (2) x^y$$

$$(3) \sin \frac{y}{x} + \sin(xy) \quad (4) \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

問題 3. 次の関数の極値を求めよ.

$$(1) x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y$$

$$(2)^{\dagger} e^{-x^2-y^2}(2x^2+y^2)$$

$$(3)^{\dagger} xy + \frac{8}{x} + \frac{8}{y}$$

$$(4)^* \sin x + \sin y + \cos(x+y) \\ (-\pi \leq x, y \leq \pi)$$

$$(5)^* x^2 + xy + y^2 + \frac{3(x+y)}{xy}$$

問題 4.* n 次同次多項式 $f(x, y)$ に対し, 次を示せ.

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

鞍点という単語は, 英語の a saddle point の直訳です. サドルといえば, 今の時代は自転車が連想されますが, 元々は乗馬用の鞍(くら)を意味する単語でした. 普段は使われなくなった言葉も, このような専門用語に残っていると考えると何か不思議な感じがします.

私が数学用語から存在を知った単語に「箆」というものがあります. 英語の a quiver の訳で, 日本語としての意味は“矢を入れて背に負う道具”になります. さて, この漢字の読み方はわかりますか?

小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ.

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad f_2(x) = \frac{2x}{x^2+1},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

(2) 2 変数関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ に対して, 極値および鞍点を求めよ.

注意. (1) f_2 以外は逆三角関数, 双曲線関数に関する積分である. (2) 例題 4.11 の解法を参照のこと.

小レポートについて. 次回の講義の際に提出すること. 原則として期限を過ぎての提出は認めないが, やむを得ない事情がある際は, 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること.

事務連絡 11 月 28 日は講義担当者の出張のため休講になります. そしてその次の週の 12 月 5 日に中間試験を実施します.

6 条件付き極値問題

6.1 平面曲線

定義 6.1. なめらかな 2 変数関数 $f(x, y)$ の零点全体の集合 $N_f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = 0\}$ は xy 平面上の曲線を描く. これを f が定める平面曲線という.

例. (1) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ならば, $f(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$ なので, N_f は単位円になる. (2) $g(x, y) = x^2 + y^2 + 1$ ならば, $g(x, y) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = -1$ なので, $N_g = \emptyset$ (空集合).

定義 6.2. (1) $\nabla f(a) = 0$, つまり $f_x(a) = f_y(a) = 0$ をみたす N_f 上の点を, N_f の特異点という. これは f の停留点のうち, $f(a) = 0$ をみたすものである. (2) 特異点でない N_f 上の点を非特異点という.

a を N_f の特異点とすると, $f(a) = 0$ かつ $\nabla f(a) = 0$ である. このとき, f の Taylor 展開を考えれば

$$f(a + h) = (h_1, h_2) \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + o(\|h\|^2)$$

となる. これより特異点の近くでの曲線 N_f の振る舞いは $H_f(a)$ を調べることでわかる.

定理 6.3. a を N_f の特異点とする. (1) $\det H_f(a) > 0$ ならば点 a は N_f の中で孤立している. これを孤立点という. (2) $\det H_f(a) < 0$ ならば, 点 a の近くで N_f は 2 本の曲線であって, 点 a で交わる. これを結節点という. (3) $\det H_f(a) = 0$ のときは何もわからない.

例題 6.4. 次の関数が定める平面曲線の特異点を求め, その特異点の種類を答えよ.

$$f(x, y) = y^2 - x^3 + x^2, \quad g(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

(考え方) 特異点は f の停留点であって f の零点になる点であるので, まず $f_x = f_y = 0$ かつ $f = 0$ となる点を探し, 次に $H_f(a)$ の正負を調べる. 解答略.

(コメント) (1) は楕円曲線と呼ばれる曲線の一種であり, (2) は Descartes の正葉線と呼ばれる (次ページ参照).

6.2 陰関数定理

$f(x, y) = 0$ において, x を一つ決めると y も決まる. このように, $f(x, y) = 0$ から定まる関数を陰関数という. ただし, 一般には一つの x に対して決まる y は複数

個存在することもある. 逆に $y = f(x)$ とかけるものを陽関数という.

例. $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき, 陰関数 $f(x, y) = 0$ は $y = \pm\sqrt{1-x^2}$ のように (2 つの) 陽関数として表せる. しかし, 点 $(1, 0)$ の近くでは陽関数の形で表せない.

定理 6.5 (陰関数定理). $f(x, y)$ はなめらかとし, $f(a, b) = 0$ を満たすとする. もし $f_y(a, b) \neq 0$ ならば, ある関数 $y = \varphi(x)$ が一意的に存在して, (1) $\varphi(a) = b$, (2) $x = a$ の近くで $f(x, \varphi(x)) = 0$, (3) $x = a$ の近くで φ はなめらかで $\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}$.

6.3 \mathbb{R}^2 の集合について

定義 6.6. (1) $B(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x - a\| < r\}$ を開円板という (境界を含まない). (2) $\overline{B}(a; r) := \{x \in \mathbb{R}^2; \|x - a\| \leq r\}$ を閉円板という (境界を含む).

定義 6.7. $A^c := \{x \in \mathbb{R}^2; x \notin A\}$ を A の補集合.

定義 6.8. 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ に対して, (1) $B(x; \delta) \subset A$ となる正数 $\delta > 0$ が存在するような点 $x \in A$ を A の内点といい, (2) A の補集合 A^c の内点を A の外点という. (3) A の内点でも外点でもない点を境界点という. その全体の集合を ∂A と書き, 境界という.

定義 6.9. (1) 集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の任意の点が入内点であるとき A を開集合という. (2) A の補集合 A^c が開集合であるとき, A を閉集合という.

例. (1) $B(a; r)$ は開集合, $\overline{B}(a; r)$ は閉集合. (2) 連続関数 $f(x, y)$ に対して, $A := \{x \in \mathbb{R}^2; f(x) \neq 0\}$ は開集合, $B := \{x \in \mathbb{R}^2; f(x) = 0\}$ は閉集合.

命題 6.10. (1) 開集合 O に対して, $O \cap \partial O = \emptyset$. (2) 閉集合 C に対して, $\partial C \subset C$.

定義 6.11. 集合 A に対して, ある正数 $R > 0$ が存在して $A \subset B(0; R)$ となるとき, A は有界であるという.

定理 6.12. 連続関数 $f(x, y)$ は, 有界閉集合上で必ず最大値と最小値をとる.

まとめ (1) 平面曲線の特異点について. (2) 陰関数定理は, 陰関数 $f(x, y) = 0$ を局所的に陽関数 $y = \varphi(x)$ と表せることを保証してくれる. (3) 集合の内点・外点・境界および開集合・閉集合の定義. (4) 連続関数は有界閉集合において必ず最大値と最小値を持つ.

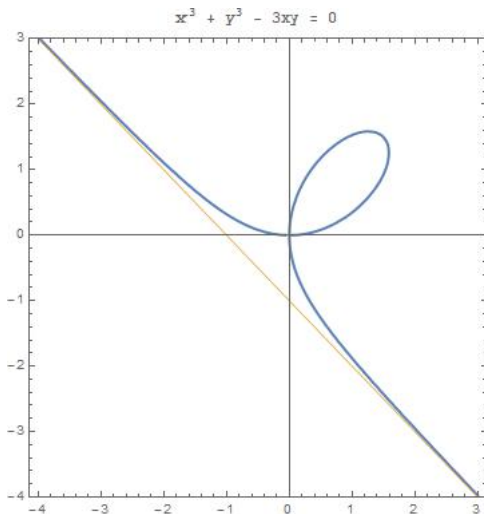
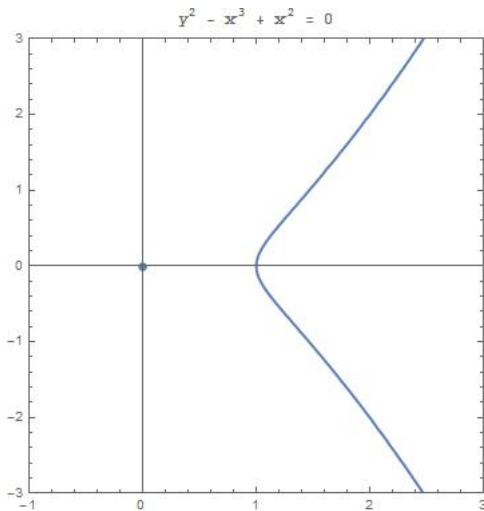
演習問題 6

問題 1.[†] 次の平面曲線の特異点を求めよ．

- (1) $x^4 - 4xy + y^4 = 0$
- (2) $2x^3 + 2y^3 - 3x^2 - 3y^2 + 1 = 0$
- (3) $y^2 + xy - x^3 = 0$
- (4) $y^4 - y^2 + x^2 = 0$

問題 2. 次の集合について、次の問いに答えよ．(i) 開集合になるか、閉集合になるか、あるいはどちらでもないか答えよ．(ii) その境界を求めよ．

- (1)[†] $A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \begin{array}{l} 0 < x < 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$
- (2)[†] $A_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \right\} \subset \mathbb{R}^2$
- (3)* $A_3 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{Q}^2; \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{array} \right\} \subset \mathbb{R}^2$



小レポート

(1) 次の関数の原始関数を一つ求めよ．

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^4 - 1},$$

$$f_3(x) = \frac{1}{(x+1)(x^2-1)}, \quad f_4(x) = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

(2) 次の関数が定める平面曲線の特異点を求め、その特異点の種類を答えよ．

- (i) $f(x, y) = x^2 - y^2(y + 1)$
- (ii) $g(x, y) = x^2 - y^4 + 2y^2 - 1$

注意．(1) 部分分数分解． f_4 は部分分数分解の後で $\frac{ax+b}{x^2+x+1}$ の積分に帰着される．これを $\frac{2x+1}{x^2+x+1}$ と $\frac{1}{x^2+x+1} = \frac{1}{(x+\frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}}$ に分解し、後者は $x + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}u$ と変数変換する．(2) 特異点は一つだけとは限らない．

小レポートについて、次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが、やむを得ない事情がある際は、必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること．

今日の講義を踏まえると、簡単な平面曲線ならばグラフの概形を描くことができます．まず特異点を調べ、結節点ならばそこでの接線を求め、次に水平点 ($f_x = 0$ となる曲線上の点) と垂直点 ($f_y = 0$ となる曲線上の点) を調べる．これだけでも十分に概形を捉えることができます．さらに $x \rightarrow +\infty$ のときにどのような振る舞いをするか (漸近曲線という) ということも調べると、よりそれらしくなります．例えば例題で扱った次の平面曲線

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$$

について考えます．特異点を求めると、原点のみであり、そこでは $H_f(0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ なので、原点は結節点．ここでの接線は $x = 0$ と $y = 0$ で、水平点は $(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{4})$ 、垂直点は $(\sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{2})$ ．また、少し難しいので割愛しますが、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき、この曲線は直線 $x + y = -1$ を漸近線に持ちます．これより、この平面曲線は左図 (下) の形になることがわかります．

参考文献．斎藤正彦、「微分積分教科書」、東京図書．

7 最大値・最小値の問題

前回、連続関数は有界閉集合上で必ず最大値および最小値をとるということを紹介した。ここで問題になるのは、その最大値・最小値をどこでとるかということである。1変数関数の場合は、極値が区間の端点かのいずれかであった。実は2変数関数のときも、次の定理にあるように、1変数のときと同様である。

定理 7.1. 連続関数 $f(x, y)$ が点 a において有界閉集合 C における最大値 (最小値) をとるならば、 a は、① f の停留点、② C の境界点、のいずれかである。

つまり、有界閉集合上の最大・最小を調べる際には、例えば $C = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ の場合にはその境界 $x^2 + y^2 = 1$ 上での f の振る舞いも調べる必要がある。

7.1 条件付き極値問題

平面曲線 $g(x, y) = 0$ 上での2変数関数 $f(x, y)$ の極値について考える。

定理 7.2. 条件 $g(x, y) = 0$ のもとで関数 $f(x, y)$ が点 a で広義の極値をとるとする。もし a が曲線 N_g の非特異点ならば、ある実数 α が存在して、 $f_x(a) = \alpha g_x(a)$ かつ $f_y(a) = \alpha g_y(a)$ をみたす*1。

(コメント) 証明には陰関数定理を用いる。

注意 7.3. この定理は次の形で使われる。

▶ 条件 $g(x, y) = 0$ のもとでの関数 $f(x, y)$ の広義の極値の候補は、次の①および②で尽くされる:

- ① 平面曲線 $g(x, y) = 0$ の特異点、
- ② 3つの未知数 x, y, λ に関する次の連立方程式の解

$$f_x(x, y) = \lambda g_x(x, y), f_y(x, y) = \lambda g_y(x, y), g(x, y) = 0.$$

注意 7.4. 注意 7.3 の②は、新しい変数 λ を導入して $F(x, y, \lambda) := f(x, y) - \lambda g(x, y)$ とすれば

$$F_x = F_y = F_\lambda = 0$$

のように書ける。このようにして極値の候補点を探す方法を ラグランジュ Lagrange の未定乗数法と呼ぶ。

例題 7.5. 条件 $x^2 + y^2 = 6$ のもとでの関数 $f(x, y) = x^2 y^2 - 2xy$ の極値を求めよ。

(考え方) まず条件を与える曲線 $g(x, y) = 0$ の特異点を求める。次に Lagrange の未定乗数法を利用し、極値の候補点を探す。最後に曲線上に極値候補とそこでの f の値を書き込み、目視によって極大・極小を判断する。

(略解) (i) N_g は特異点を持たない。(ii) Lagrange の未定乗数法により、候補点は $A^\pm = \pm(\sqrt{3}, \sqrt{3})$, $B^\pm = \pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ および $C^\pm = \pm(\sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1)$, $D^\pm = \pm(\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} + 1)$ を得る。図にそれぞれでの値を書き込めば、点 A^\pm で極大値 3、点 B^\pm で極大値 15、点 C^\pm および点 D^\pm で極小値 -1 をとることがわかる。

7.2 最大・最小問題

例題 7.6. 有界閉集合 $\{(x, y); x^2 + y^2 \leq 6\}$ における関数 $f(x, y) = x^2 y^2 - 2xy$ の最大値と最小値を求めよ。

(考え方) 内部と境界とで場合を分ける。① 内部では f の停留点での値を求める。② 境界上については例題 7.5 を参照のこと。

(略解) f の停留点は $(x, y) = (0, 0), (a, 1/a)$ ($a \in \mathbb{R}^\times$) であり、 $f(0, 0) = 0$, $f(a, 1/a) = -1$ である。よって例題 7.5 と合わせれば、 f は $(x, y) = \pm(\sqrt{3}, -\sqrt{3})$ で最大値 15、領域内の曲線 $xy = 1$ 上で最小値 -1 をとる。

例題 7.7. $D = \{(x, y); x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$ における $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ の最大値と最小値を求めよ。

(コメント) 境界が三角形や四角形のときは、線分に分割して考える。

(略解) (1) f の停留点は $(x, y) = \pm(1, 1), \pm(1, -1)$ の4点で、このうち D 内にあるのは $A^\pm = (1, \pm 1)$ の2つ。(2) ∂D の極値を考える。(i) まず $x^2 + y^2 = 4$ で考える。Lagrange の未定乗数法より極値の候補点は $B^\pm = \pm(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, $C^\pm = \pm(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$, $D^\pm = \pm(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2})$ を得るが、この内 ∂D 上にあるのは B^+ , C^+ , D^+ の3点である。(ii) 次に y 軸上の線分について、 $h(y) := f(0, y) = y^3 - 3y$ ($-2 \leq y \leq 2$) の最大最小を考えると、 $y = 1, -2$ で最小、 $y = -1, 2$ で最大。(3) 以上をまとめ、図に書き込んで調べると、点 $(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \frac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2})$ で最大値 $2\sqrt{2}$ 、点 $(1, 1)$ で最小値 -4 をとることがわかる。

まとめ (1) 連続関数は有界閉集合において必ず最大値と最小値を持つ。(2) 曲線上における極値問題を解くための方法の一つに、Lagrange の未定乗数法がある。(3) 有界閉集合上の最大値と最小値を求める際は、内部と境界とに場合を分けて考える。

11月21日。

*1 $\nabla f(a) = \alpha \nabla g(a)$ とも書ける。

演習問題 7

問題 1. 次の関数の，指定された条件下における極大・極小を論ぜよ．

(1) $x^2 + y^2 = 6$ で $x^4 + y^4 - 4xy - 2x^2 - 2y^2$

(2) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ で $f(x, y) = xy$

(3) $(x^2 + y^2)^2 = 2(x^2 - y^2)$ で $f(x, y) = xy$

問題 2. 最大最小を論ぜよ．

(1) $x^2 + y^2 \leq 6, x \geq 0$ で $x^4 + y^4 + 4xy - 2x^2 - 2y^2$

(2) $y^4 - y^2 + x^2 \leq 0$ で $x^3 + y^3$

(3) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} \leq 1$ で xy

2 変数関数のグラフは 3 次元的になるので，1 変数関数のグラフよりもイメージし辛くなります．そのようなときは数式処理ソフトの力を借りるのがよいです．有名なものとして，Mathematica，Maple，Risa/Asir，Maxima といったものがあります．有料のものがおおいですが，後半 2 つはフリーソフトです．2 変数関数のグラフを描画するのであれば，Maxima がおすすめです．使い方はインターネット検索で調べると色々出てきますので，興味があれば是非やってみてください．先週扱った平面曲線も綺麗に描画してくれます．

小レポート

(1) 次の広義積分は収束するか．収束するならばその値を求めよ．

(i) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$ (ii) $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ (iii) $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + 1}}$

(2) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, x^2 + y^2 \leq 4\}$ における関数 $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3x - 3y$ の最大値と最小値を求めよ．

注意．(1) 被積分関数の不連続点で分割して広義積分を考える．(2) 条件 $x^2 + y^2 = 4$ のもとで考えて，その後で $x \geq 0$ の部分だけを抜き出す． y 軸上の線分についても考察を忘れないように．

小レポートについて．今回に限り，学務部事務室内（センター 1 号館 2 階）にあるレポートボックスに提出すること．レポート受付期間は 11 月 27 日（月）から 11 月 29 日（水）の 17:00 までの予定です．

▶ 中間試験について 12 月 5 日に中間試験を行います．部屋は講義を行っている教室です．

試験範囲：前期の内容（主に小レポートから出題），多変数関数の全微分・接平面，合成関数の微分（連鎖律），平面曲線，2 変数関数の条件付き極値問題・最大最小問題．

講義中の例題・小レポートで出題した問題を中心に出題する．若干の係数変更や演習問題から出題する可能性もある．

8 多変数関数における積分

積分の2変数関数への一般化には、「重積分」と「線積分」の二通りの可能性がある。いずれの場合においても積分する範囲(積分区域)が、1変数のときと比べて遥かに複雑である。本講義では重積分のみを扱う。

1変数関数の積分は、関数のグラフと x 軸とで囲まれた図形の面積を、区間を分割して作った長方形たちの面積で近似し、その極限によって構成した。これを高次元に拡張するのだから2変数関数のグラフ(曲面)と xy 平面とで囲まれた体積とするのが自然であろう。つまり、底辺をなす図形を長方形で分割し立方体により近似して極限を取るのである。したがって、まずは図形の面積を定義するところから始めることになる。

8.1 図形の面積

まずは、基本となる次の領域を定義しておく。

定義 8.1. $I = \{(x, y); a_1 \leq x \leq b_1, a_2 \leq y \leq b_2\}$ を長方形領域と呼ぶ。その面積を $\mu(I)$ とすると、

$$\mu(I) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2).$$

与えられた集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対し、 x 軸および y 軸に平行な直線により D をメッシュ分割する(Δ で表す)。詳しい図は教科書 p.179 の図を参照のこと。ここで、

$$\mu_*(D; \Delta) := (D \text{ 中にある長方形の面積の総和}),$$

$$\mu^*(D; \Delta) := (D \text{ と接触する長方形の面積の総和})$$

と置く。このとき、明らかに $\mu_*(D; \Delta) \leq \mu^*(D; \Delta)$ である。図を見れば分かるように、 μ_* は内側から D の面積を近似しており、 μ^* は外側から D の面積を近似している。さて、 $|\Delta| \rightarrow 0$ のときの極限をそれぞれ $\mu_*(D)$ 、 $\mu^*(D)$ とする。

定義 8.2. $\mu_*(D) = \mu^*(D)$ のとき D は面積確定という。この値 $\mu_*(D)$ を D の面積と呼び、単に $\mu(D)$ と書く^{*1}。

定義 8.3. (1) ある閉区間 $[a, b]$ 上で、2つの連続関数 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ を用いて表される次の集合 D を縦線領域、(2) ある閉区間 $[c, d]$ 上で、2つの連続関数 $\tilde{\varphi}(y)$ 、 $\tilde{\psi}(y)$ を用いて表される次の集合 \tilde{D} を横線領域という。

$$D = \{(x, y); a \leq x \leq b, \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\},$$

$$\tilde{D} = \{(x, y); c \leq y \leq d, \tilde{\varphi}(y) \leq x \leq \tilde{\psi}(y)\}.$$

命題 8.4. 縦線領域 D は面積確定で、その面積は

$$\mu(D) = \int_a^b \{\psi(x) - \varphi(x)\} dx.$$

同様に、横線領域 \tilde{D} も面積確定で、

$$\mu(\tilde{D}) = \int_c^d \{\tilde{\psi}(y) - \tilde{\varphi}(y)\} dy.$$

例題 8.5. 次の領域の面積を求めよ。

$$\tilde{D} = \left\{ (x, y); 0 \leq y \leq 1, -\frac{y}{y^2+1} \leq x \leq \frac{1}{y^2+1} \right\}.$$

(考え方) \tilde{D} は横線領域なので、 $\int_0^1 \{\tilde{\psi}(y) - \tilde{\varphi}(y)\} dy$ を計算すればよい。答えは $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \log 2$ になる。□

注意 8.6. $\Omega(D) := \mu^*(D) - \mu_*(D)$ を境界と交わる長方形の面積の総和とすれば、

$$D \text{ が面積確定} \Leftrightarrow \Omega(D) = 0.$$

つまり、面積を持つかどうかは境界に関する条件ともいえる。一般に、なめらかな曲線の面積は0になることが知られているので、通常扱う閉曲線で囲まれた図形はすべて面積確定である。

面積を持たない図形の例。

$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \leq 1, x, y \in \mathbb{Q}\}$ とすると、

$$\mu_*(Q) = 0, \quad \mu^*(Q) = 1, \quad \Omega(Q) = 1$$

となり、 Q は面積確定でないことがわかる。

次の関数は、集合を関数を使って表せるという点で非常に便利なものである。次回、重積分の定義の際に用いる。

定義 8.7. 集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ に対して、

$$\chi_D(x) := \begin{cases} 1 & (x \in D), \\ 0 & (x \notin D) \end{cases}$$

を D の定義関数という。

まとめ (1) 2変数関数の積分は「底面積」×「高さ」を燃り集めたものにしたい。(2) 面積確定な集合。

演習問題 8

問題 1. 次の集合の図を描け .

- (1) $D_1 = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$
- (2) $D_2 = \{(x, y); 1 \leq y \leq \sqrt{3}, y \leq x \leq y^2\}$
- (3) $D_3 = \{(x, y); 0 \leq x \leq y \leq 4x, 1 \leq xy \leq 2\}$
- (4) $D_4 = \{(x, y); 1 \leq xy \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x^2\}$
- (5) $D_5 = \{(x, y); 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4, x, y \leq 0\}$

問題 2. 横線領域でない縦線領域を一つ構成せよ .

問題 3.* 面積確定でない集合を構成せよ .

中間試験へのコメント . 平均は 69.6 点でした .

- 1 平均は 10.8 点です . 前期の復習ということで小レポートからの出題でしたが , 満点を取れた人が数名しかいませんでした .
- 2 平均は 15.1 点です . 極座標変換の基本的な性質の問題でしたが , 意外とできていませんでした .
- 3 平均は 10.6 点です . 連鎖律の問題です . これは微積で抑えておくべき内容ですので , できなかった方はしっかりと復習してください .
- 4 平均は 12.1 点です . (1) で確認することは , 偏導関数 f_x, f_y が連続であることです . そのことに触れていないものは不十分としています .
- 5 平均は 21.1 点です . (3) まではよく出来ていましたが , Lagrange の未定乗数法の問題はあまりよくはありませんでした . これは多変数関数の微分のゴールの一つなので , しっかりと復習しておいてください . また (1) の図形を描く問題で既に間違えている人が意外と多かったのが気になりました .

小レポート

(1) 次の有理関数の不定積分を計算せよ .

$$\int \frac{x^5 + 1}{x^3 + x} dx$$

(2) 次の集合の図を描け .

- (i) $D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- (ii) $D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x, y \geq 0, 1 \leq xy \leq 2\}$
- (iii) $D_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; -2 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 4\}$

注意 . (1) まず分子の次数を分母よりも小さくしてから , 部分分数分解を行う .

小レポートについて . 次回の講義の際に提出すること . 原則として期限を過ぎての提出は認めないが , やむを得ない事情がある際は , 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること .

レポート課題

中間試験で 60 点未満の方にはレポートを課します . 中間試験のすべての大問 (大問 1 に関しては間違えたところのみ) を書き直し , 1 月 9 日 (火) までに提出ください .

レポートの書き方についての注意事項

1. 学籍番号および氏名を忘れずに書くこと .
2. レポート用紙は自由です . 市販のレポート用紙でなくても , 普段使っているルーズリーフでもよいです . ただし , ばらばらにならないようにステープラー等で綴じるようにしてください .
3. 丁寧に書くよう心掛けてください . レポートの見易さも評価対象とします . 時々 , 解読に時間が掛かるものがあります . レポートは飽くまでも他人に見てもらえるものですので , 最低限読めるように書いてください .
4. 用紙を使い惜しまないようにしてください . 一頁にむりやり詰め込んで書いてしまうと , どの問題について記述しているのかを判別することが難しくなります .
5. レポートは , 試験と違ってノート・教科書なども参考にして構いません . ただし , 解答をそのまま書き写すことがないようにしてください . また , 参考にしたものはレポートに記載するようにしてください .

9 多変数関数の積分

1 変数の場合は、積分区間を分割して、関数のグラフと x 軸とで囲まれる図形を長方形の集まりで近似し、その極限をとることにより定積分を定義した。2 変数の場合は、積分領域を長方形で分割し、関数のグラフ (曲面) と xy 平面とで囲まれる図形を四角柱の集まりで近似し、その極限をとることにより定義するのが自然であろう。

9.1 重積分

$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界な集合とし、 $f(x, y)$ を D 上の関数とする。1 変数に場合を踏まえ、「底面が D であるような上面が曲がっている柱の体積 V 」を考察する。 D をメッシュ分割し、その分割に現れる各長方形を D_{ij} のように表す。1 変数の時と同様に、

$$m_{ij}(f; \Delta) := \inf_{x \in D_{ij}} f(x), \quad M_{ij}(f; \Delta) := \sup_{x \in D_{ij}} f(x)$$

とおき、さらに

$$s(f; \Delta) := \sum_{i,j} m_{ij}(f; \Delta) \cdot \mu(D_{ij}),$$

$$S(f; \Delta) := \sum_{i,j} M_{ij}(f; \Delta) \cdot \mu(D_{ij})$$

とする。このとき、明らかに $s(f; \Delta) \leq V \leq S(f; \Delta)$ なので、 $|\Delta| \rightarrow 0$ とすれば

$$s(f) \leq V \leq S(f).$$

定義 9.1. D 上の関数 $f(x, y)$ が $s(f) = S(f)$ をみたすとき、 f は D 上で積分可能という。この値を $\int_D f(x, y) dx$ とかき、 D 上の重積分という。

定理 9.2. 連続関数 $f(x, y)$ は面積確定な有界閉集合 D 上で積分可能である。

9.2 重積分の計算

定理 9.3. $f(x, y)$ を連続関数とする^{*1}。

(1) 縦線領域 D に対して

$$\int_D f(x, y) dx = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x, y) dy \right) dx.$$

(2) 横線領域 \tilde{D} に対して

$$\int_D f(x, y) dx = \int_c^d \left(\int_{\tilde{\varphi}(y)}^{\tilde{\psi}(y)} f(x, y) dx \right) dy.$$

12月19日。

^{*1} このような積分を累次積分という。

例題 9.4. $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ のとき

$$I = \int_D \sqrt{4x^2 - y^2} dx.$$

(考え方) まず積分区域を描く。 $f(x, y)$ の形を見て、 x, y のうちでどちらを先に計算するほうが楽かを考える。今回は y を先に計算するほうが楽。答えは $\frac{\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{6}$ 。

例題 9.5. $\tilde{D} = \{(x, y); 1 \leq y \leq \sqrt{3}, y \leq x \leq y^2\}$ で

$$J = \int_{\tilde{D}} \frac{y}{x^2 + y^2} dx.$$

9.3 重積分の基本性質

定理 9.6. 面積確定な D 上連続な関数 f, g に対して、

$$(1) \int_D (f(x) + g(x)) dx = \int_D f(x) dx + \int_D g(x) dx,$$

$$(2) \int_D (\alpha f(x)) dx = \alpha \int_D f(x) dx,$$

$$(3) f(x) \geq g(x) \text{ ならば } \int_D f(x) dx \geq \int_D g(x) dx.$$

定理 9.7. $D = D_1 \cap D_2$ かつ $\mu(D_1 \cap D_2) = 0$ のとき、

$$(1) \int_D f(x) dx = \int_{D_1} f(x) dx + \int_{D_2} f(x) dx,$$

$$(2) f(x) \geq 0 \text{ ならば } \int_D f(x) dx \geq \int_{D_1} f(x) dx.$$

定理 9.8. $\mu(D) = \int_D 1 dx.$

9.4 積分の順序交換

重積分 $\int_D f(x, y) dx$ において x, y のどちらを先に計算しても、結果は変わらない。片方で計算できなくても、もう片方では計算できることがある。 x を先に計算する累次積分が与えられたとき、それを y を先に計算する累次積分に書き換えて計算すること (あるいはその逆) を積分の順序交換という。

例題 9.9. $\int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt[3]{x}} e^{y^2} dy \right) dx$

(考え方) $\int e^{y^2} dy$ は計算できない。そこで、先に x で積分することを考える。そのためにまずは与えられた累次積分がどのような積分区域での重積分を書き換えたものであるかを調べる。

まとめ (1) 重積分の定義。(2) 縦線領域と横線領域上の重積分は、累次積分として計算できる。(3) 一見計算できない累次積分であっても、積分の順序交換することにより、計算が可能になる場合がある。

演習問題 9

問題 1. 次の積分を計算せよ.

$$(1) D = \{(x, y); 0 \leq x, y \leq 1\}$$

$$(i) \int_D xy \, dx \quad (ii) \int_D \frac{dx}{(x+y+1)^2}$$

$$(iii) \int_D e^{x+y} \, dx \quad (iv) \int_D \frac{y^2}{x^2 y^2 + 1} \, dx$$

$$(2) D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$$

$$(i) \int_D xy \, dx \quad (ii) \int_D (1 - x^2 - y^2) \, dx$$

$$(3) D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 3, 0 \leq 3y \leq 6 - 2x\}$$

$$\int_D \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \, dx$$

問題 2. 次の累次積分の順序を変更せよ.

$$(i) \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{1-x^2}}^{x+2} f(x, y) \, dy \right) \, dx$$

$$(ii) \int_0^1 \left(\int_0^{\frac{1}{x+1}} f(x, y) \, dy \right) \, dx$$

(ヒント: 積分の順序を変更する場合, 積分領域を分割する必要がある点に注意)

小レポート

例題 9.5 の重積分を, 縦線領域に分割することにより計算せよ.

注意. 横線領域の場合と比べて計算が大変であるが, 計算可能である. 積分領域は 2 つに分割して考える. ヒントとしては, $\int \frac{y}{x^2+y^2} \, dy = \frac{1}{2} \log(x^2+y^2)$ や $\log(x^2+x) = \log x + \log(x+1)$ など. \log の積分は, 部分積分を用いる.

小レポートについて. 次回の講義の際に提出すること. 原則として期限を過ぎての提出は認めないが, やむを得ない事情がある際は, 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること.

固有値・固有ベクトルについて. 行列 A の固有値 λ および (λ に対応する) 固有ベクトル $x \neq 0$ とは,

$$Ax = \lambda x$$

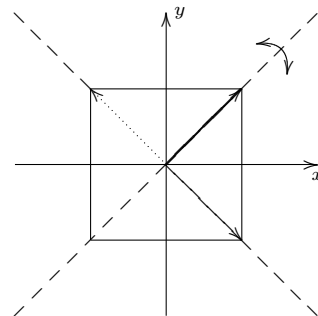
を満たすもののことでした. λ が固有値であれば, $(\lambda E - A)x = 0$ を満たすので, 連立一次方程式

$$\det(tE - A) = 0$$

の解が固有値となります. そして固有ベクトルは, 連立一次方程式 $(\lambda E - A)x = 0$ の解です.

▶ 具体例として $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ で考えてみます. 固有値は $\det(tE_2 - A) = t^2 - 1 = 0$ の解, つまり $\lambda = \pm 1$ になります. 固有ベクトルは, $\lambda = 1$ のときは連立一次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ の解, つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり, $\lambda = -1$ のときは, 連立一次方程式 $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$ の解, つまり $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ となります.

▶ 図形的にみると, 行列 A の作用は直線 $y = x$ に関する折り返しであって, 固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (太線のベクトル) はこの折り返しで変化しません. また固有ベクトル $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ (単線のベクトル) は折り返しによって点線のベクトルに移りますが, これら二本のベクトルはいずれも同じ直線 ($y = -x$) 上にあります. つまり, “固有ベクトルはその行列の作用によって方向を変えないベクトルである” ということになります. ベクトル空間の言葉を用いると, “固有ベクトルとは行列の作用によって不変な部分空間の基底である” と明快に表現できます.



10 重積分の計算

前回は縦線 (横線) 領域においては重積分は累次積分により計算できることを見た。今回は, 1 変数関数における置換積分 $\int_a^b f(x) dx = \int_{a'}^{b'} f(g(u)) g'(u) du$ を一般化する。ただし, $a = g(a')$, $b = g(b')$ である。ここで $D = [a, b]$, $D' = [a', b']$ とすれば $g: D' \rightarrow D$ であり,

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(g(u)) g'(u) du$$

のように書くことができる。

10.1 変数変換の理論

D 上の重積分 $\int_D f(x) dx$ を D' 上の重積分に変換することを考える。なめらかな写像

$$\begin{array}{ccc} \Phi: D' & \longrightarrow & D \\ \cup & & \cup \\ u & \longmapsto & x = \Phi(u) \end{array}$$

を考える。ただし, Φ は 1 対 1 とする。このとき, Φ の Jacobi 行列を $J_\Phi(u)$ とすれば, 十分小さい h に対して

$$\Phi(u+h) = \Phi(u) + h^t J_\Phi(u) + o(\|h\|)$$

と, Φ は各点の十分近くでは線形写像^{*1}で近似できる。このように, Jacobi 行列 J_Φ は写像 Φ の微分と思える。

定義 10.1. なめらかな 1 対 1 の写像 Φ に対して, 次の行列式を Φ の Jacobian という。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \det \begin{pmatrix} \varphi_u(u) & \varphi_v(u) \\ \psi_u(u) & \psi_v(u) \end{pmatrix} = \det J_\Phi(u).$$

行列の復習 (1) 行列 A の変換により, 平面上の四角形は四角形にうつる。(2) 面積は $|\det A|$ 倍になる。

命題 10.2. D' 上で $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ とする。このとき

$$\mu(D) = \int_{D'} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du.$$

説明。(0) D を四角形によるメッシュで分割し, それを Φ で引き戻したものにより D' を分割する。(1) メッシュを細かくすると, D' の各分割はほぼ四角形と思える。(2) このとき, 考える四角形が小さいので Φ の作用は行列 J_Φ とみなせる。(3) よって, $\mu(I_{ij}) = |\det J_\Phi(u)| \cdot \mu(K_{ij})$ であり, 面積はこれらを総和したものである。命題が成立することがわかる。ただし, $I_{ij} \subset D$, $K_{ij} \subset D'$ 。

1 月 9 日。

^{*1} 正確にはアファイン変換=平行移動 + 線形写像である。

定理 10.3. なめらかな写像 $\Phi: D' \rightarrow D$ は 1 対 1 であるとし, さらに D' 上で $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$ とする。このとき,

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(\Phi(u)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du.$$

右辺の $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ は Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の絶対値である。

10.2 変数変換での計算

変数変換が $(x, y) = \dots$ という形で与えられているときは, Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ の計算は楽である。その逆, つまり $(u, v) = \dots$ という形で変数変換が与えられた場合を考える。変換 $\Phi: D' \rightarrow D$ は 1 対 1 なので, $u = \Phi^{-1}(x)$ と逆に解くことができる。この Φ^{-1} に関する Jacobian を $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$ とかけば, 次が成り立つ。

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)^{-1}.$$

例題 10.4. 変数変換 $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$ により, 次の重積分を計算せよ。

$$I = \int_D x^2 y^2 dx, \quad D = \left\{ (x, y); \begin{array}{l} 0 < x \leq y \leq 4x \\ 1 \leq xy \leq 2 \end{array} \right\}.$$

(考え方) (1) u, v の動く範囲 D' を求める。(2) この変換の Jacobian $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ を求める。今は $(u, v) = \dots$ の形なので, $\left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right)^{-1}$ を計算するのが楽である。

命題 10.5. 極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ において

$$dx dy = r dr d\theta.$$

例題 10.6. 次の重積分を計算せよ。

$$J = \int_D \sqrt{x^2 + y^2} dx.$$

ただし, $D = \{(x, y); x, y \geq 0, 2x \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ 。

(コメント) 「 $x^2 + y^2$ 」がある場合は極座標変換をするとうまくいくことが多い。

まとめ (1) 重積分における置換積分に相当するものは, 変数変換である。(2) 重積分において, 1 変数の場合の $dx = g'(u) du$ に対応するものは, Jacobian を用いて

$$dx = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du = |\det J_\Phi(u)| du$$

と書ける。

演習問題 10

問題 1. 次の重積分を，極座標変換を用いて計算せよ．

ここで $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\}$ とする．

$$(1) \int_D (x^2 + y^2) e^{-x^2 - y^2} dx$$

$$(2) \int_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx$$

$$(3) \int_D \frac{dx}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

問題 2. $D = \{(x, y); 1 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 1\}$ とする．

次の重積分を，変数変換 $x = u^2, y = \frac{v}{u}$ をすることにより求めよ．

$$\int_D \frac{dx}{(1+x)(1+xy^2)}.$$

問題 3. $D = \{(x, y); 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$ のとき，次の重積分を計算せよ．

$$\int_D \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

小レポート

次の重積分を，変数変換を用いて計算せよ．

(1) $D_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq R^2\} \ (R > 0)$

$$\int_{D_1} e^{-x^2 - y^2} dx$$

(2) $D_2 = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$

$$\int_{D_2} \frac{x+y}{1+(x-y)^2} dx$$

ヒント．(1) 極座標変換 (2) 次の変換 $x = u + v, y = u - v$ ．

小レポートについて．次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること．

x が 0 に十分近いとき，解析的な関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

と表せます (Taylor 展開)．これはベクトル空間の理論の言葉を用いると，“ $1, x, x^2, x^3, \dots$ は解析的な関数全体のなすベクトル空間の基底である” と言い換えることができます．また，この例は無限次元のベクトル空間であっても“基底”が存在することがあるということを教えてください．

高年次になると Fourier 級数展開・Fourier 変換というものを学びます．Fourier 級数展開は，区間 $[-\pi, \pi]$ 上のなめらかな関数を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

のように， $\sin x$ と $\cos x$ で表すというものです．ベクトル空間の視点から見れば，これは“関数の無限個の組 $1, \sin x, \sin 2x, \dots, \cos x, \cos 2x, \dots$ が区間 $[-\pi, \pi]$ 上の滑らかな関数の空間の基底になっている” となります．しかも，この基底は標準的な内積に関して互いに直交しており，非常に性質の良い基底になっています．ちなみに Euler の公式を用いて $\sin x, \cos x$ を指数写像 $e^{\pm ix}$ に書き換えると，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} \quad (1)$$

となります．さて，適当なクラスに属する関数 $f(x)$ に対してはその Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ というものが定義され，次を満たします．

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi. \quad (2)$$

この場合は残念ながら考える空間が大きすぎて，もはや‘基底’というものが存在しません．しかし，式 (2) の右辺は式 (1) と非常に似ています．これより，式 (1) における Fourier 係数 c_n は e^{inx} の係数であることの類似として，式 (2) の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ は $e^{ix\xi}$ の‘係数’ということが出来ます．つまり，Fourier 変換とは“ある種の基底変換を行うことと対応している” ということもできるのです．

11 多変数関数における広義積分

11.1 復習

1 変数のときの広義積分には、① 有界区間上での非有界関数の積分、② 非有界区間上の関数の積分、という2つのパターンあった。

$$\textcircled{1} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = 2,$$

$$\textcircled{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^R = 1.$$

どちらの場合も、まず問題が生じない区間で積分を計算し、その後で極限を取っている。

今までの多変数での積分は「面積確定な D が有界かつ閉集合のとき、連続関数 $f(x, y)$ は D で有界で、可積分」であった。この条件は厳しすぎて、例えば $D = \mathbb{R}^2$ や有理関数（二つの多項式の比）といった重要なものも除外されてしまう。そこで、もう少しだけ一般化する。

11.2 非有界な関数の積分

D が有界でも閉集合でなければ連続関数 $f(x, y)$ は必ずしも有界とは限らない。 $D = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ で $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ などがその例を与える。

さて、 $D \subset \mathbb{R}^2$ を有界集合とし、 $f(x, y)$ を D 上連続とする。また、簡単のため $f(x, y) \geq 0$ とする。 D に含まれる閉集合 K 上では $f(x, y)$ は有界ゆえ可積分可能で、したがって

$$I(K) = \int_K f(x) dx$$

が定まる。今 $f(x) \geq 0$ としているので、 D 内のどんな閉集合 K に対しても $I(K) \leq \int_D f(x) dx$ である^{*1}。

定義 11.1. D 内の任意の面積確定な閉集合 K に対して $\int_K f(x) dx$ が有界であるとき、連続関数 $f(x, y)$ は D で広義積分可能といい、 D 上での積分は次で定義する。

$$\int_D f(x) dx := \sup_K \int_K f(x) dx$$

ただし、右辺の \sup は D 内の閉集合全体を動く。

例題 11.2. 次の広義積分を計算せよ。

$$I = \int_D \frac{dx}{\sqrt{xy}}, \quad D = \left\{ (x, y); \begin{array}{l} 0 < x \leq 1 \\ 0 < y \leq 1 \end{array} \right\}.$$

1月16日。

^{*1} D 上の積分を定義していないので、このように書くのは実際には不適切である。

(考え方) まず領域を図示し、どこで問題が生じているかを確認する。そして、その箇所を避けるように「閉集合列」 K_n を $(\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = D \text{ となるように})$ 構成し、

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{K_n} f(x, y) dx$ を計算する。

11.3 非有界集合上の関数の積分

非有界集合の例 (1) \mathbb{R}^2 全体 (2) 第1象限の点全体

(3) $D = \{(x, y); x \geq 1, 0 \leq xy \leq 1\}$ 。

定義 11.3. D を非有界な集合とする。 D 内の任意の面積確定な有界閉集合 K に対して $\int_K f(x) dx$ が有界であるとき、連続関数 $f(x, y)$ は D で広義積分可能といい、

$$\int_D f(x) dx := \sup_K \int_K f(x) dx$$

と定義^{*2}。右辺の \sup は D 内の有界閉集合全体を動く。

例題 11.4. 次の重積分を計算せよ。

$$\int_D e^{-x-y} dx, \quad D = \{(x, y); x, y \geq 0\}.$$

(考え方) 例題 12.3 と同じである。

注意 11.5. \mathbb{R}^2 を近似する閉集合列としては、 $K_n = [-n, n] \times [-n, n]$ や円 $B_n = \{(x, y); \sqrt{x^2 + y^2} < n\}$ がよく使われる。

重要な定積分 次の定積分は2変数関数の広義積分を用いることで計算できる。

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

(略証) $I = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx$ を2通りの方法で計算する。

① まずは先述の正方形 K_n を用いる。 $\lim_{n \rightarrow +\infty} K_n = \mathbb{R}^2$

であり、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(K_n) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$ 。

② 円板 B_n なら $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \mathbb{R}^2$ で、 $\lim_{n \rightarrow +\infty} I(B_n) = \pi$ 。

③ 上の二つを合わせると、 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ となる。

まとめ (1) 多変数の場合においても広義積分を考えることができる。(2) D に含まれる閉集合の列 K_n で $\lim K_n = D$ となるものを構成し、 $\lim I(K_n)$ を計算する。(3) うまく利用すれば、普通には計算できない1変数の定積分も計算できる。

^{*2} 定義 12.2 とほぼ同じである。

演習問題 11

問題 1. 次の広義積分を求めよ .

(1) $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, y^2 \leq x\}$ のとき

$$\int_D \frac{dx}{\sqrt{x-y^2}}$$

(2) $D = \{(x, y); x, y \geq 0\}$ のとき

$$\int_D \frac{dx}{(x+y+1)^3}$$

(3) $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ のとき

$$\int_D \frac{dx}{(x-a)^2 + y^2} \quad (0 < a \leq 1)$$

問題 2. $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$ を利用して , 次の広義積分を求めよ .

$$(1) \int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx \quad (2) \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x^2} dx$$

$$(3) \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} dx \quad (4) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x \log(1/x)}}$$

$$(5) \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx \quad (a, ac-b^2 > 0)$$

期末試験のアナウンスをする時期になりました . 試験日は 2 月 6 日 (火) の予定ですが , 正確な情報は各自掲示板で確認ください .

出題範囲 .

1. 前期の内容のうち , 連鎖律か Lagrange の未定乗数法のいずれか .
2. 重積分の計算 (累次積分 , 変数変換 , 広義積分 , 3 変数以上の重積分)

講義で扱った例題や小レポート , 演習問題を中心に
出題します . 判定基準は前期よりも厳しくなります
(むしろ前期が非常に甘かった) .

小レポート

次の広義積分を求めよ .

(1) $D_1 = \{(x, y); x^2 + y^2 < 1\}$ のとき

$$\int_{D_1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

(2) $D_2 = \{(x, y); 0 < x \leq 1, 0 < y \leq x\}$ のとき

$$\int_{D_2} \frac{x+y}{x^2+y^2} dx$$

(3) $D_3 = \mathbb{R}^2$ のとき

$$\int_{D_3} \frac{dx}{(x^2+y^2+1)^2}$$

注意 . どの箇所で問題が生じているかを明確にすること . いずれも極座標変換で計算ができる . もちろん , 他の方法で計算してもよい .

小レポートについて . 次回の講義の際に提出すること . 原則として期限を過ぎての提出は認めないが , やむを得ない事情がある際は , 必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること .

12 多変数関数における広義積分 II

前回は多変数関数における広義積分を扱った．それは，問題が生じる箇所を避けたところで重積分を計算し，その後で極限を取るものであった．今回は発散する場合および被積分関数が符号を変える場合について扱う．

12.1 発散する場合

例題 12.1. $D = \{(x, y); 0 < x, y \leq 1\}$ のとき，

$$I = \int_D \frac{dx}{x^2 y^2}.$$

解． $D_n = \{\frac{1}{n} \leq x, y \leq 1\}$ として，

$$\int_{D_n} \frac{dx}{x^2 y^2} = \left(\left[-\frac{1}{x} \right]_{\frac{1}{n}}^1 \right)^2 = (n-1)^2.$$

より， $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} \frac{dx}{x^2 y^2} = +\infty$ なので，発散．

例題 12.2. $D = \{(x, y); 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$ のとき，

$$I = \int_D \frac{dx}{x^2 + y^2}.$$

解． $B_n = \{\frac{1}{n^2} \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ として，

$$\int_{B_n} \frac{dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{r dr}{r^2} = 2\pi \log n.$$

よって， $I = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{B_n} \frac{dx}{x^2 + y^2} = +\infty$ なので，発散．

12.2 関数が符号を変えるとき

これまででは $f(x, y) \geq 0$ を仮定していた．この条件を外すとどうなるだろうか．次の広義積分を例に考察する： $D = \{0 \leq x, y \leq 1, (x, y) \neq (0, 0)\}$ として，

$$I = \int_D \frac{x-y}{(x+y)^3} dx.$$

(i) D を横線領域としてみると，

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dx \right) dy = -\frac{1}{2}.$$

(ii) D を縦線領域としてみると，

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy \right) dx = \frac{1}{2}.$$

つまり，計算の仕方によって値が変わる可能性がある^{*1}．

1月23日．

^{*1} 紙面の都合で計算の詳細は省いている．

定義 12.3. $f(x, y)$ を D 上で連続な関数とする．絶対値を取った関数 $|f(x, y)|$ が D で広義積分が可能であるとき， $f(x, y)$ は D で絶対積分可能という．

先程の例では， $f(x, y) = f^+(x, y) + f^-(x, y)$ と分解^{*2}したとき， $\int_D f^+(x) dx$ と $\int_D f^-(x) dx$ がともに発散してしまうために不都合が生じた．実際，

$$f^+(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{(x+y)^3} & (x \geq y) \\ 0 & (x < y) \end{cases}$$

であり， $D_n = \{\frac{1}{n} \leq y \leq 1, y \leq x \leq 1\}$ とすると，

$$\int_{D_n} f^+(x) dx = \frac{1}{2} - \frac{n}{n+1} + \frac{1}{4} \log n$$

なので，

$$\int_D f^+(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{D_n} f^+(x) dx = +\infty.$$

命題 12.4. 有界閉集合 D 上で，1 点 x_0 を除いて有界な連続関数は $D' := D \setminus \{x_0\}$ 上で絶対積分可能．

例題 12.5. D を単位円板 $D = \{(x, y); x^2 + y^2 \leq 1\}$ ， $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy - 3y^2}{x^2 + y^2}$ ($(x, y) \neq (0, 0)$) とする．

- (1) $f(x, y)$ は $D' = D \setminus \{0\}$ 上で有界であることを示せ．
- (2) $\int_D f(x) dx$ を求めよ．

(考え方) 有界であることを示すには，絶対値を取って，上から x, y に依存しない定数で抑えればよい．

注意 12.6. x 軸に沿って原点に近づくとき $f(x, y) \rightarrow 1$ ， y 軸に沿って原点に近づくときは $f(x, y) \rightarrow -3$ である．つまり， $f(x, y)$ は原点で不連続であるが，それでも絶対積分が可能である．

注意 12.7. 例題 12.2 の被積分関数は

$$|f(x)| = \frac{1}{r^2} \rightarrow +\infty \quad (r \rightarrow +0 \text{ のとき})$$

である．つまり， $f(x, y)$ は $D' = D \setminus \{0\}$ で有界でない．なお，これが有界でなくても収束する場合もある^{*3}．

まとめ (1) 広義積分は収束せず，発散することもある．
(2) 被積分関数が符号を変えるときは，絶対積分可能なもののみ広義積分が意味を持つ．

^{*2} $f^+(x, y)$ は $f(x, y)$ が正の値を取る場合はその値を，それ以外ときは 0 を取る関数． $f^-(x, y)$ も同様に定義する．

^{*3} 単位円板上における $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$ など．

演習問題 12

問題 1. 次の広義積分は収束するか．収束する場合はその値を求めよ．

$$(1) \int_D \frac{dx}{\sqrt{x^2 - y^2}}; D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{array} \right\}$$

$$(2) \int_D \frac{dx}{|x - y|}; D = \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq x, y \leq 1 \\ x \neq y \end{array} \right\}$$

$$(3) \int_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx; D = \{0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$$

問題 2. 関数 $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$ は \mathbb{R}^2 において絶対積分可能かどうか調べよ．

問題 3. 次の閉曲線で囲まれる図形の面積を求めよ．

$$(1) x^2 + y^2 = 1$$

$$(2) ax^2 + by^2 = 1 \quad (a, b > 0)$$

$$(3) \sqrt{|x|} + \sqrt{|y|} = 1$$

1 月 9 日出題分の小レポートの問題 (2) が全然できていませんでした．しかも，間違いの系統が綺麗に 3 つ (① 答えが $\pi/4$ ② 答えが $\pi/32 + 1/8$ ③ 途中で諦め) に分かれていました．③ はともかくとして，他人の解答をうつしたところで何の意味も価値もありません．ウェブページに解答を用意していますので，それを参考にして，きちんと理解するようにしてください．

小レポート

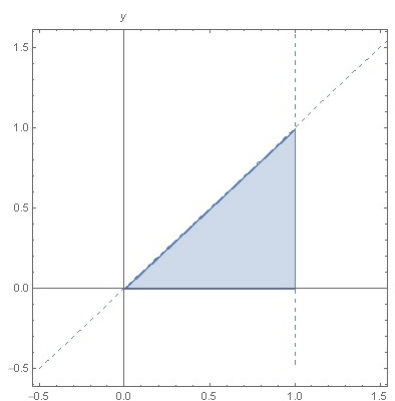
次の広義積分は収束するか．収束するならば，その値を求めよ．

$$(1) \int_D \frac{dx}{x^2 y^2} \quad (2) \int_D \frac{dx}{\sqrt{xy}} \quad (3) \int_{D'} \frac{dx}{x - y}$$

ここで

$$D = \{(x, y); 1 \leq x, y \leq +\infty\}$$

および D' は次の図形で表される領域である．



小レポートについて．次回の講義の際に提出すること．原則として期限を過ぎての提出は認めないが，やむを得ない事情がある際は，必ずその旨を期限日までにメールにより連絡すること．

13 高次元における重積分

3次元以上になっても、同様の手法で重積分を定義できる。2次元では長方形 $I = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ が基本となったが、 n 次元においては n 次元の直方体 $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ が基本となる。この直方体の体積は $\mu(I) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_n - a_n)$ により定義する。そして、 \mathbb{R}^n の部分集合 D についても、 n 次元直方体でメッシュを入れて、「内体積」と「外体積」を通して D の体積を定義する。講義ではこうした一般論は展開せず、計算法の紹介に留める。

13.1 変数変換について (復習)

例題 13.1. $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$ を極座標変換したときの、 r, θ の動く範囲 D' を求めよ。

(考え方) 片方の変数を固定して、もう片方の変数の動く範囲を見る。つまり、縦線 (or 横線) 領域とみる。

例題 13.2. 例題 13.1 と同じ D を取る。変換 $x = u + v, y = u - v$ のとき、 (u, v) の動く範囲 D' を求めよ。

(考え方) 与えられた不等式から $v \geq (u \text{ の関数})$ を作る。そこから (u, v) 平面に図示して、数式で表す。

13.2 3変数以上での積分

例題 13.3. $D = \{x \in \mathbb{R}^3; x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$ のとき、次の重積分の値 I を求めよ。

$$I = \int_D \frac{dx}{(x + y + z + 1)^2}.$$

考え方) 2変数のときと同様に、累次積分ができる。 $z \rightarrow y \rightarrow x$ の順で計算することになると、積分区間は $x \rightarrow y \rightarrow z$ の順で決めることになる。

まず $0 \leq x \leq 1$

次に*1 $0 \leq y \leq 1 - x$

最後に $0 \leq z \leq 1 - x - y$

例題 13.4. 3次元の球 $B_3(R)$ の体積 $V_3(R)$ を求めよ。

$$B_3(R) := \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$$

(考え方) 変数変換も、2変数の場合と同様にできる。3次元の球極座標変換においては次のようになる。

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

ここで $r^2 \sin \theta$ は Jacobian である。

13.3 ガンマ関数とベータ関数

定義 13.5. ガンマ関数 $\Gamma(s)$ ($s > 0$) とベータ関数 $B(s, t)$ ($s, t > 0$) を次のように定義する (1変数関数)。

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{s-1} dx \quad (s > 0),$$

$$B(s, t) := \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{t-1} dx \quad (s, t > 0).$$

注意 13.6. これらは広義積分であるが、与えられた範囲において収束する。

定理 13.7. $B(s, t) = \frac{\Gamma(s)\Gamma(t)}{\Gamma(s+t)}$ ($s, t > 0$).

定理 13.8. n 次元の球 $B_n(R)$ の体積 $V_n(R)$ は

$$V_n(R) = \frac{(\pi R^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}$$

で与えられる。ただし、

$$B_n(R) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2\}.$$

(計算の粗筋) $V_n(R)$ は「各変数が0以上である $B_n(R)$ の部分集合 $B'_n(R)$ 」の体積 $V'_n(R)$ の 2^n 倍になることを利用する。裏面にある計算より、

$$V'_n(R) = \frac{\sqrt{\pi}R}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot V'_{n-1}(R)$$

という関係式が得られる。明らかに $V'_1(R) = R$ であるので、 $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ に注意すれば、

$$V'_n(R) = \left(\frac{\sqrt{\pi}R}{2}\right)^{n-1} \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot V'_1(R) = \frac{(\sqrt{\pi}R)^n}{2^n \Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

これより、求める公式が得られる:

$$V_n(R) = 2^n \cdot V'_n(R) = \frac{(\pi R^2)^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)}.$$

まとめ (1) 3変数以上になっても、2変数における重積分の計算手法がほぼそのままの形で適用できる。(2) 空間の極座標変換と、その Jacobian の公式は

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

(3) n 次元の球の体積はガンマ関数を用いて表せる。

1月30日。

*1 $1 - x - z$ において z を動かしたもののなかで一番大きいもの。

演習問題 13

問題 1. $D = \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ とする. 空間の極座標変換

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

を利用して, 次の重積分を計算せよ.

$$(1) \int_D \frac{dx}{x^2 + y^2 + (z-2)^2}$$

$$(2) \int_D \frac{dx}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z-2)^2}}$$

問題 2. 円柱座標変換

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z$$

を利用して, 次の重積分を計算せよ.

$$(1) \int_D z \, dx \quad (2) \int_D z^2 \, dx$$

ただし, D は次で定義される \mathbb{R}^3 の領域である.

$$D = \left\{ (x, y, z); \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 2x, \, z \geq 0 \end{array} \right\}$$

問題

次の積分を計算せよ.

$$(1) \int_D (x + y + z) \, dx \quad D = \left\{ \begin{array}{l} x, y, z \geq 0 \\ x + y + z \leq 1 \end{array} \right\}$$

$$(2) \int_D x^2 \, dx \quad D = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

$$(3)^* \int_D 1 \cdot dx \quad D = \{x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz \leq 1\}$$

(3) は力試し用の問題.

累次積分は, 見易さのために $\int dx \int dy$ のような形で書いている. 後ろの積分から順に計算をしていく. また, $\int_{y_1 + \dots + y_n \leq 1} \dots dy$ は $D_0 = \{y_1 + \dots + y_n \leq 1, y_1, \dots, y_n \geq 0\}$ 上での積分という意味. 特に $y_1, \dots, y_n \geq 0$ を暗に仮定していることに注意 (記述を簡潔にするため). また, $r = R/2$ とおく (スペースの都合).

$$\begin{aligned} V'_n(R) &= \int_{x^2 + \dots + x_n^2 \leq R^2} dx \\ &\stackrel{(1)}{=} \int_{y_1 + \dots + y_n \leq 1} r^n (y_1 \times \dots \times y_n)^{-1/2} dy \\ &\stackrel{(2)}{=} r^n \int_0^1 y_n^{-1/2} dy_n \\ &\quad \times \int_{y_1 + \dots + y_{n-1} \leq 1 - y_n} (y_1 \dots y_{n-1})^{-1/2} dy' \\ &\stackrel{(3)}{=} r^n \int_0^1 y_n^{1/2-1} (1 - y_n)^{(n+1)/2-1} dy_n \\ &\quad \times \int_{z_1 + \dots + z_{n-1} \leq 1} (z_1 \dots z_{n-1})^{-1/2} dz' \\ &\stackrel{(4)}{=} r \times B\left(\frac{1}{2}, \frac{n+1}{2}\right) \times V'_{n-1}(R) \\ &= r \times \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2} + 1)} \cdot V'_{n-1}(R). \end{aligned}$$

式変形について.

$$(1) x_j^2 = R^2 y_j. \text{ Jacobian は } r^n (y_1 \dots y_n)^{-1/2}.$$

(2) y_n とそれ以外という形の累次積分.

また $dy' = dy_1 dy_2 \dots dy_{n-1}$ である.

$$(3) y_j = (1 - y_n) z_j. \text{ Jacobian は } (1 - y_n)^{n-1}.$$

(4) 後ろの積分は y_n に依存していないので, 累次積分はただの積分の積になる. y_n に関する積分はベータ関数でかける.