

線形代数学・同演習 A

4 月 12 日分 演習問題

1. 次の行列の式を計算をせよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & 8 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 9 & -1 \\ -4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) \quad 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \quad \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$(5) \begin{pmatrix} -6 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad (6) \quad \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (8) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

2. 実数 a, b, c, d に対して , 次の等式を確認せよ .

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. 次の等号が成り立つように , x, y, u, v の値を定めよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} x+y & x-y \\ u-1 & 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ であるとき , 次の式を計算せよ .^{*1}

$$(1) A + B \quad (2) AB - BA \quad (3) (A + B)(A - B)$$

$$(4) A^2 \quad (5) B^2 \quad (6) A^2 - B^2$$

5. 次の行列に逆行列があれば , それを求めよ . ただし , $a, d \neq 0$ で , θ は任意の実数とする .

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad (3) \quad \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

6. 講義中の補題 1.8 で挙げられている行列の諸性質を証明せよ . 行列のサイズは適切に指定すること . 例えば (1) では , 行列 A, B, C をそれぞれ (m, n) 型 , (n, r) 型 , (r, s) 型の行列とする , など .

7. 2 つの行列 $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & x \end{pmatrix}$ において , P は逆行列 P^{-1} を持つとする . $B = P^{-1}AP$ とするとき , $B = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ となるように実数 x, a, b の値を定めよ .

^{*1} (3) および (6) から , $(A + B)(A - B) \neq A^2 - B^2$ であることが確認できる . これは $AB \neq BA$ であるため .

線形代数学・同演習 A

4 月 19 日分 演習問題

1. 2 次正方行列 A, B に対して, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ が成り立つことを証明せよ.
2. 平面 $P: ax + by + cz = d$ の法線ベクトルを \mathbf{a} とし, 平面 P 上の 1 点 \mathbf{x}_0 を一つ固定する.
このとき, 平面 P 上の任意の点 \mathbf{x} に対して, $(\mathbf{a} | \mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0$ が成り立つことを示せ.*²
3. 次の 2 本のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} のなす角度 θ を求めよ ($\cos \theta$ を計算するだけでよい).^{*3}

$$\begin{array}{ll} (1) \mathbf{x} = {}^t(1, 2), \mathbf{y} = {}^t(2, 1) & (2) \mathbf{x} = {}^t(1, -2, 3), \mathbf{y} = {}^t(2, -3, 1) \\ (3) \mathbf{x} = {}^t(1, 1, 1), \mathbf{y} = {}^t(-1, -2, 1) & (4) \mathbf{x} = {}^t(1, -1, 1), \mathbf{y} = {}^t(-1, 2, 3) \end{array}$$

4. 空間の点 $(1, 2, 3)$ を通り, 方向 $(0, 2, 1)$ を持つ直線の方程式を求めよ.
5. 空間の点 $(1, 0, 3)$ を通り, 法線ベクトル $(0, 2, 1)$ を持つ平面の方程式を求めよ.
6. 次の空間の三点を通る平面の方程式を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (1) (1, 1, 1), (1, 2, 3), (3, 2, 1) & (2) (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \\ (3) (2, -1, 3), (-1, 2, 1), (3, 1, -1) & (4) (a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c) \end{array}$$

7. l_1, l_2 を以下で与えられるような直線とする:

$$l_1: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad l_2: \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

次の平面の方程式を求めよ.

- (a) 点 $(1, -5, 4)$ を通り, 直線 l_1, l_2 に平行な平面,
- (b) 直線 l_1 を含み, 直線 l_2 に平行な平面.

8. 原点と平面 $2x + y - 2z = 1$ との距離を求めよ.*⁴
9. 3 次元空間において, 原点 O と直線 $l: \mathbf{x} = {}^t(1, -5, 2) + s{}^t(1, -1, 1)$ との距離を求めよ.*⁵
10. 次の空間内の 2 本のベクトル \mathbf{x}, \mathbf{y} に対して, その外積 $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ を求めよ.*⁶

$$(1) \mathbf{x} = {}^t(2, 0, 0), \mathbf{y} = {}^t(0, 0, 4). \quad (2) \mathbf{x} = {}^t(1, 1, 1), \mathbf{y} = {}^t(1, -1, 0).$$

- 11.* 次の 2 平面の交線を求めよ.

$$\begin{array}{ll} (a) P_1: 2x - y + z = 3, & P_2: 3x - 5y + 2z = 1. \\ (b) P_1: 2x + 2y - 2z = 3, & P_2: x + 2y + 3z = 5. \\ (c) P_1: x - 2y + 5z = 0, & P_2: x - y + z = -2. \end{array}$$

*² $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ は平面 P に沿ったベクトルなので, これより平面 P の法線ベクトルとは“平面 P と直交しているベクトル”であることが分かる. \mathbb{R}^2 における直線の法線ベクトルも同様である.

*³ ${}^t(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ という意味. 縦のスペースをとるので, 文書ではこのように書くことも多い.

*⁴ 原点と平面上の点との距離の最小値を求めよ, という問題. 実は, 法線ベクトル \mathbf{a} が関わってくる.

*⁵ 問題 8 と同様, 原点と直線上の点との距離の最小値を求めよ, という問題.

*⁶ 次週, ここ (演習問題) で簡単な計算方法を紹介する.

線形代数学・同演習 A

4 月 26 日分 演習問題

1. 一般の線形写像 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ が与えられたとき, ある $m \times n$ 行列 A が存在して, $f(x) = Ax$ となることを示せ.
2. $D = \{(x, y); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ を単位正方形, K を 4 点 $(0, 0), (1, 2), (0, 4), (-1, 2)$ を頂点とする菱形とする. このとき, D を K に写すような平面の線形写像をすべて決定せよ.
3. 次の 2 次正方行列の固有値および固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad (4) P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

定義. 直線 (もしくは平面) に関する鏡映写像とは, その直線 (平面) に関する折り返しを与える写像のこと. 例えば, 直線 $y = 0$ (つまり x 軸) に関する鏡映写像は, $(x, y) \mapsto (x, -y)$ である.

4. 次の直線に関する鏡映写像を行列を用いて表せ.

$$(1) l_1: x + y = 8 \quad (2) l_2: ax - y = b \quad (a > 0)$$

5. 次の平面に関する鏡映写像を行列を用いて表せ.

$$(1) \pi_1: x + y + z = 8 \quad (2) \pi_2: 2x - 4y + z = 5 \quad (3) \pi_3: x + y + az = a \quad (a > 0)$$

6. 二つの空間ベクトル $\mathbf{a} = {}^t(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2, b_3)$ の外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ を考える. ただし, \mathbf{a}, \mathbf{b} は平行ではなく, どちらも $\mathbf{0}$ ではないとする.

- (1) 原点 O を通り, 方向 \mathbf{a}, \mathbf{b} を持つ平面は次に表わされることを示せ:

$$(a_2b_3 - a_3b_2)x + (a_3b_1 - a_1b_3)y + (a_1b_2 - a_2b_1)z = 0.$$

- (2) $(a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}|\mathbf{b})^2$ を示せ.

- (3) $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}|\mathbf{b})^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 \sin^2 \theta$ を示せ. この問題 (1)–(3) より, 次を得る^{*7}:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

この結果を用いると, (2) の等式は $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2 - (\mathbf{a}|\mathbf{b})^2$ と書ける.

- (4) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{b} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$ を示せ.

- (5) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} + (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ を示せ^{*8} (Jacobi の恒等式).

^{*7} 法線ベクトルは平面と垂直なベクトルであるが, この平面は 2 つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} を含むので, これら 2 つのベクトルと垂直になっている. よって $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ はこの法線ベクトルのスカラー倍であるが, (2) よりそのスカラーは 1 で良いことが分かる. (実はまだ不十分で, 符号を確認しないとイケない. これには“行列式”の概念が必要なので, ここでは深入りしない. ここに簡単に書いておくと, 外積 $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ の方向は $\det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b}) > 0$ となるように取っている.)

^{*8} 上の結果を用いて良い.

線形代数学・同演習 A

5 月 10 日分 演習問題

1. 次の連立方程式を解け.

$$(1) \begin{cases} 3x & -z = 1 \\ -2x + 2y & = 3 \\ -5x + y + z & = -2 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x + 2y & = 3 \\ 2x + 2y + z & = -2 \\ x + y + z & = 1 \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x + 2y + 3z = -1 \\ 4x + 5y + 8z = 5 \\ -4x + 8y + 9z = 0 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} x - 4y + z = -6 \\ 5x + y + z = 0 \\ 2x + 2y + z = 5 \end{cases} \quad (5) \begin{cases} x - y - 4z = -17 \\ 3x + y - z = 0 \\ 2y + z = 3 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} 2x - 3y + 4z = 3 \\ x - 2y + 3z = 2 \\ x - 2y - 4z = -5 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x & + w = -1 \\ x + y + z & = -2 \\ 2x & + 4w = 0 \\ y & + w = 3 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 1 \\ 5x + 5y + 6z + 7w = -1 \\ 8x + 5y + 6z + 5w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + 2w = 5 \end{cases}$$

$$(9) \begin{cases} x + 2y & - 4w + 7u = -1 \\ 3x - 2y + z - 2w + 4u & = 2 \\ 2x - 2y + z & + 4u = -4 \\ 2x - 6y + z + 5w + 7u & = -2 \\ x + y & - 3w + 3u = 0 \end{cases} \quad (10) \begin{cases} x + 2y - 2z - 2w & = 3 \\ 3x + y + z + 4w + 2u & = 4 \\ y + z + 3w + 5u & = 4 \\ 5x & + 5z - w - 2u = -2 \\ x - y + z + w - u & = -1 \end{cases}$$

2. 一般の $m \times n$ 行列に対する基本変形与える m 次正方行列たち

$D_i(\lambda)$: i 行目を λ 倍する基本変形に対応する行列

$F_{ij}(\lambda)$: i 行目に j 行目の λ 倍を加える基本変形に対応する行列

W_{ij} : i 行目と j 行目を入れ替える基本変形に対応する行列

の具体的な表示を求めよ.

3. 問題 2 の各行列たちに対して, 逆行列を求めよ.*⁹

4. 次の行列は逆行列を持つか. 持てばそれを求めよ.*¹⁰

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 6 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

5.* 次の連立一次方程式はいつ唯一の解を持つか. またそのときの解を求めよ.*¹¹

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases}$$

*⁹ 正方行列 A の逆行列とは, $AB = BA = E_n$ を満たす正方行列 B のこと. 存在すればそれは一意に決まり, $B = A^{-1}$ で表す.

*¹⁰ 拡大行列 $(A|E_3)$ に基本変形を施す. もし $(E_3|B)$ の形になれば A は逆行列 $A^{-1} = B$ を持つが, その形にならなければ逆行列を持たない.

*¹¹ この連立一次方程式の係数行列は, Vandermonde(ヴァンデルモンド) 行列という名前がついている.

線形代数学・同演習 A

5 月 17 日分 演習問題

1. 行列の階数について、以下を示せ．

(a) 任意の $m \times n$ 行列 A に対して、 $\text{rank } A \leq \min(m, n)$ ．

(b)* 行列 A, B の積が定義できるとき、 $\text{rank}(AB) \leq \min(\text{rank } A, \text{rank } B)$ ．

2. 次の行列を簡約化し、その階数を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & -6 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -5 & -2 & -7 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 12 \\ 2 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -4 & -6 \\ 3 & -5 & 16 & -29 & -5 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 & 5 & -5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 5 & -5 & 4 & 8 \\ 3 & 3 & 0 & 1 & 9 & -9 & 1 & 10 \\ 1 & -3 & -4 & 5 & -1 & 1 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & -6 & 5 & 9 & -9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

3. 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} x + 4y + 2z + 3w = 1 \\ 2x + 3y + 4z + w = -2 \\ 3x + 2y + z + 4w = 3 \\ 4x + y + 3z + 2w = 0 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 3y - z + 2w = 3 \\ -x + 3y + 2z - 2w = 1 \\ -x + 3y + 4z - 2w = 9 \\ 2x - 6y - 5z + 4w = -6 \\ x - 3y + 2w = 7 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} x - 2y + 5z - 2w = -12 \\ 3x + y + 8z - 2w = -4 \\ 4x + 5y + 7z + w = 13 \\ x + 5y - 2z - 2w = 16 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} y + 2z + 3w = 1 \\ -x + z + 3w = 1 \\ -2x - y + 3w = 1 \\ -3x - 3y - 3z = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x + 3y + z - 8w = 3 \\ -2x - 5y - z + 13w = -4 \\ 3x + 8y + 2z - 21w = 0 \end{cases} \quad (6) \begin{cases} x + y + 2z = 2 \\ 2x - 3y - z = 1 \\ 4x - 11y - 7z = 2 \\ x - 9y - 8z = 4 \end{cases}$$

$$(7) \begin{cases} x + 3y - 2z = 3 \\ 2x + y + z = -4 \\ 4x + 2y - z = -5 \\ 2x + y - z = 2 \end{cases} \quad (8) \begin{cases} x + y - 2z + w = -3 \\ 2x - y + 2z + 2w = -6 \\ 3x + 2y - 4z - 3w = 9 \end{cases}$$

4.* 次の行列の階数がちょうど 2 になるように、 a, b, c の値を定めよ．

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & a & 1 \\ 2 & b & 1 & c \\ 1 & 1 & b & 1 \\ 1 & b+1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

線形代数学・同演習 A

5 月 24 日分 演習問題

1. 次の連立方程式を解け．

$$(1) \quad \begin{cases} x + 2y + 3z + 5w = 0 \\ 2x + 4y + 7z + 11w = 0 \\ -x - 2y - 2z - w = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} x + y - 2z + w = 0 \\ 2x - y + 2z + 2w = 0 \\ 3x + 2y - 4z - 3w = 0 \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} 2x + 4y + z + 4u + 5v = 0 \\ x + 2y + 3z - 3u + 5v = 0 \\ 4x + 8y + 15z - 18u + 23v = 0 \end{cases}$$

$$(4) \quad \begin{cases} x + 3y - 2z - 3w = 0 \\ 2x + y + z + 4w = 0 \\ 4x + 2y - z + 5w = 0 \\ -2x - y + z - 2w = 0 \end{cases}$$

2. 次の行列は正則かどうか調べよ．また正則ならば，その逆行列を求めよ．

$$(1) \quad \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -6 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -2 & 7 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} -3 & 6 & -7 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \begin{pmatrix} -3 & 7 & 12 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 3 & -9 & -20 \\ -4 & 12 & 21 \\ 1 & -3 & -5 \end{pmatrix}$$

$$(6) \quad \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 2 & -12 & 1 & 18 \\ 0 & 5 & 0 & -36 \end{pmatrix}$$

$$(7) \quad \begin{pmatrix} -2 & 6 & 2 & 5 \\ 1 & -3 & -1 & -2 \\ 2 & -7 & 0 & 2 \\ 5 & -14 & -8 & -14 \end{pmatrix}$$

$$(8) \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -6 & -2 \\ 0 & 2 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

3. 正方行列 A に対して，逆行列が存在すれば一つであることを示せ．^{*12}

4. A, B を正則行列とする．

(a) $(A^{-1})^{-1} = A$ を示せ．

(b) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ を示せ．

(c) $A + B$ はまた正則行列となるか．

5.* 次の連立一次方程式の解空間の次元をパラメータ a, b により分類して述べよ．^{*13}

$$(1) \quad \begin{cases} x + y + z + aw = 0 \\ x + y + bz + w = 0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} ax - y + z + 3aw = 0 \\ bx + y + bz + w = 0 \\ x + w = 0 \end{cases}$$

6.* 与えられた整数係数の行列を簡約化するプログラムを作成せよ．^{*14}

^{*12} つまり， B, C が共に A の逆行列とすれば， $B = C$ となることを示す．

^{*13} 式が複雑になるので解は求めなくてもよい．また，解空間の次元とは，解を記述する際に用いるパラメータの個数のことである．

^{*14} 行列の基本変形はプログラミングと相性がよい．このことが連立一次方程式を拡大係数行列に置き換えて解く大きな理由である．プログラミングに興味がある方はぜひやってみてください．

線形代数学・同演習 A

5 月 31 日分 演習問題

1. A を任意の n 次正方行列とする．以下を示せ．

- (1) $\frac{1}{2}(A + {}^tA)$ は対称行列， (2) $\frac{1}{2}(A - {}^tA)$ は交代行列，
(3) $A = X_A + Y_A$ となる対称行列 X_A と交代行列 Y_A が存在する．

2. n 次正方行列 A, B および $m \times n$ 行列 $C = (c_{ij})$ に対して，以下を示せ．^{*15}

$$(1) \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (2) \quad \text{tr}(C {}^tC) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2$$

3. 4 次正方行列 $N := (\delta_{i,j+1})$ はベキ零行列となることを示せ．

4. 次を計算せよ．

$$(1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij \quad (2) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i^2 \quad (3) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij \quad (4) \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} (i+j)^2$$

5. 二つの多項式 $\sum_{i=0}^m a_i x^{m-i}, \sum_{j=0}^n b_j x^{n-j}$ の積における x^k の係数を求めよ．

6. $e(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ とおく．このとき， $e(x+y) = e(x)e(y)$ が成り立つことを示せ．^{*16}

7. $\sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n a_{ij} \delta_{jk} a_{ki} \delta_{ij}$ を簡単にせよ．ただし， δ_{ij} は Kronecker のデルタを表す．

8. $\binom{n}{i} = {}_n C_i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$ を二項係数とする．このとき， $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i$ を計算せよ．

9. 自然数の k 乗和を $C_k(n) := \sum_{i=1}^n i^k = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$ とおくととき，以下に答えよ．

$$(1) \quad (n+1)^{k+1} = 1 + \sum_{i=1}^n ((i+1)^{k+1} - i^{k+1}) \text{ を示せ．}$$

$$(2) \quad (n+1)^{k+1} = 1 + \sum_{j=0}^k \binom{k+1}{j} C_j(n) \text{ を示せ．}$$

(3) $C_k(n)$ に関する次の漸化式が成り立つことを示せ：^{*17}

$$C_k(n) = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1} - \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} C_j(n).$$

(4) (3) を利用して， $C_4(n), C_5(n)$ を求めよ．

^{*15} tr は正方行列のトレースと呼ばれるもので，対角成分をすべて足したもので，つまり $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ のことです．

^{*16} これは無限級数であるが，この場合は総和記号の順番の入れ替え等は自由に行ってよいものとする．

^{*17} この公式からいろいろなことが分かります．例えば， N 次の公式が欲しかったら $(N-1)$ 次までの $C_k(n)$ が分かれば求められるということや， $C_k(n)$ の最高次の次数は $k+1$ であること，およびそこでの係数は $\frac{1}{k+1}$ であることなども分かります．興味がある人に，J. H. Silverman 著，鈴木治郎訳「はじめての数論」(第 39 章)を紹介しておきます．

線形代数学・同演習 A

6 月 14 日分 演習問題

1. 次の行列式を求めよ．ただし， a, b, c は任意の実数とする．

$$\begin{aligned} (1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 5 & 2 & -5 \\ -2 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} 4 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{vmatrix} \\ (5) \begin{vmatrix} -1 & -4 & 3 \\ -3 & 5 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} \quad (7) \begin{vmatrix} 1 & -a & -b \\ a & 1 & -c \\ b & c & 1 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

2. 次の行列式を求めよ．答えはできるだけ因数分解をした形で求めること．^{*18}

$$\begin{aligned} (1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} a & a^2 & b+c \\ b & b^2 & c+a \\ c & c^2 & a+b \end{vmatrix} \\ (4) \begin{vmatrix} 2a+b+c & b & c \\ a & a+2b+c & c \\ a & b & a+b+2c \end{vmatrix} \end{aligned}$$

3. ベクトル x, y が以下のベクトルであるとき，それらの外積 $x \times y$ を求めよ．

$$(1) \begin{cases} x = {}^t(2, 1, 3), \\ y = {}^t(-1, 2, -1) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x = {}^t(1, 5, 2), \\ y = {}^t(-2, -3, 1) \end{cases} \quad (3) \begin{cases} x = {}^t(3, -4, -1), \\ y = {}^t(-1, 2, 3) \end{cases}$$

4. 任意の数ベクトル $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，次の不等式が常に成り立つことを示せ．

$$|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

5. 任意の 2 次正方行列 A に対して， $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)E_2 = O$ が成り立つことを示せ．
 6. 同一平面上にない 4 点 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^3$ を頂点に持つ四面体の体積を求めよ．
 7. 任意の 3 次正方行列 A, B に対して， $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ が成り立つことを示せ．^{*19}
 8. 任意の正方行列 A, B に対して， $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A)\text{tr}(B)$ は成り立つか．成立するならば証明を，しないのならば反例を与えよ．
 9. 次の連立一次方程式を解け．また，係数行列の行列式を求めよ．

$$(1) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + 4z = -2 \\ 4x + 5y + 2z = 3 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - 3y - 3z = 2 \\ -x + 3y + 3z = -1 \\ 2x - 6y - 8z = 3 \end{cases}$$

10. 3 次正方行列 $A = (a, b, c)$ に対して，次の行列式を計算せよ．

$$(1) \det(2a, b, c) \quad (2) \det(b, a, c) \quad (3) \det(a, b, c + a)$$

^{*18} 後の講義で，より簡単な計算方法を紹介する．

^{*19} この性質は任意の n 次正方行列に対しても成立する．後の講義で，行列式の理論を使った簡単な証明を紹介する．

線形代数学・同演習 A

6 月 21 日分 演習問題

1. 4 次の置換群 S_4 の元をすべて記述せよ．また，その中で偶置換であるものは何個あるか．
2. S_n の元の個数が $n!$ であることを証明せよ．
3. 次の置換の符号を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 4 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

4. 置換の互換の積への分解は 1 通りではない．問題 3 に現れる置換でそれ確かめよ．またその分解に依らず，互換の偶奇は変わらないことも確かめよ．

定義. 複数の巡回置換に対して，それぞれの巡回域が共通の数を持たないとき，互いに素であるという．例えば， $(1\ 2)$ と $(3\ 4)$ は互いに素であるが， $(1\ 2)$ と $(1\ 3)$ は互いに素ではない．

5. σ, τ を互いに素な巡回置換とする．このとき， $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$ を示せ．
6. 次の置換を，互いに素な巡回置換の積として表わせ．

$$(a) (1\ 2\ 3)(4\ 5)(1\ 2\ 3\ 6\ 7) \quad (b) (1\ 2)(1\ 2\ 3\ 4)(1\ 2)(2\ 3\ 5\ 6)$$

定義. n 変数の多項式 $f(x_1, \dots, x_n)$ と $\sigma \in S_n$ に対して，新しい多項式 $(\sigma f)(x_1, \dots, x_n)$ を

$$(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

により定義する．例えば， $\sigma = (1\ 2)$ のとき， $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_2^3$ ならば， $(\sigma f)(x_1, x_2) = 2x_2^2 - x_1^3$ である．

- 7.* $\Delta(x_1, \dots, x_n) := \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ とおく．*²⁰

(i) 互換 $\sigma = (i\ j)$ に対して， $(\sigma \Delta)(x_1, \dots, x_n) = -\Delta(x_1, \dots, x_n)$ となることを示せ．

(ii) $\sigma, \tau \in S_n$ に対して， $((\sigma \circ \tau) \Delta)(x_1, \dots, x_n) = (\sigma(\tau \Delta))(x_1, \dots, x_n)$ を示せ．*²¹

任意の置換 σ に対して， $(\sigma \Delta)(x_1, \dots, x_n) = (-1)^{\text{sgn}(\sigma)} \Delta(x_1, \dots, x_n)$ となることを示せ．*²²

8. 任意の $\sigma \in S_n$ に対して $(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$ となる多項式を対称式と呼ぶ．

(1) 次の多項式は対称式か．

$$(a) x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 \quad (b) x_1x_2 + 2x_2 + x_3 \quad (c) (x_1x_2 - x_3x_4)(x_1x_3 - x_2x_4)$$

(2) 次の対称式を 3 次の基本対称式 $t_1 = x_1 + x_2 + x_3$, $t_2 = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$, $t_3 = x_1x_2x_3$ を用いて記述せよ．*²³

$$(a) x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \quad (b) x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 \quad (c)^* \Delta(x_1, x_2, x_3)^2$$

*²⁰ \prod は，総和記号 \sum のかけ算版．

*²¹ このことを，数学では，群 S_n は多項式に作用しているという．

*²² 特にこれより， sgn は互換への分解の仕方に依らずに定まることが分かる．

*²³ 任意の対称式は，このような基本対称式と呼ばれる対称式を用いて記述できることが知られている．

線形代数学・同演習 A

6 月 28 日分 演習問題

1. 次の行列式を計算せよ .

$$(1) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \quad (3) \begin{vmatrix} 7 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (4) \begin{vmatrix} -5 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 4 & -4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} \quad (6) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 4 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad (7) \begin{vmatrix} 8 & 3 & 2 & -5 \\ 4 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 2 & 7 \end{vmatrix} \quad (8) \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(9) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 & -1 \\ 4 & -4 & 2 & -1 \\ 5 & 5 & -2 & -2 \\ -3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad (10) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 & -2 & -5 \\ 3 & -2 & 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} \quad (11) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & -1 & 3 & 3 \\ -1 & 6 & 5 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(12) \begin{vmatrix} -4 & -5 & -1 & -3 \\ -4 & -4 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & -5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \quad (13) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 \end{vmatrix} \quad (14) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

2. $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$, $W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & \omega^2 & \omega \end{pmatrix}$ とする . ただし , $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ である .

(i) $\det(A), \det(W)$ を求めよ . また , $\det(W) \neq 0$ を確かめよ .

(ii) $\det(AW) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\det(W)$ を示し , 次の因数分解の結果を証明せよ .

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega).$$

3. 行列 $A = \begin{pmatrix} b^2 + c^2 & ab & ca \\ ab & c^2 + a^2 & bc \\ ca & bc & a^2 + b^2 \end{pmatrix}$ を $A = B^t B$ の形に直し , $\det(A) = 4a^2 b^2 c^2$ を証明せよ .

線形代数学・同演習 A

7 月 5 日分 演習問題

- 行列式の積公式 $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ を, 行列式の公式^{*24}を用いて証明せよ.
- 次の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{vmatrix} -6 & 1 & -3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} -6 & -9 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 & -6 \\ 2 & 6 & 8 & -3 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} -5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix}$$

$$(6) \begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(7) \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ -3 & 3 & 2 & 4 \\ 5 & 5 & 3 & -5 \end{vmatrix}$$

$$(8) \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ -1 & -2 & -2 & -3 \\ -2 & -1 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(9) \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 4 & -5 \\ -2 & -4 & -5 & 0 \\ -1 & -4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$(10) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$(11) \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

- A, D を正方行列とし, 特に A は正則であるとする. このとき以下を示せ.

$$(a) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}.$$

$$(b) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B).$$

- A, B, C, D を n 次正方行列, λ を任意の実数とすると, 次が成り立つことを示せ.

$$(1) \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A + \lambda C & B + \lambda D \\ C & D \end{vmatrix} \quad (2) \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| \cdot |A - B|$$

- n 次の交代行列^{*25} X について, 以下を示せ.

(a) n が奇数ならば, $\det(X) = 0$,

(b) n が偶数ならば, ある多項式^{*26} $\text{Pf}(X)$ が存在して $\det(X) = (\text{Pf}(X))^2$.

- 4 次交代行列 $A = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b & -d \\ a & 0 & -c & -e \\ b & c & 0 & -f \\ d & e & f & 0 \end{pmatrix}$ のパフィアン $\text{Pf}(X)$ を求めよ.^{*27}

^{*24} $\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$ のことです.

^{*25} 交代行列とは, $X + {}^tX = O$ を満たす正方行列のことです.

^{*26} この多項式 $\text{Pf}(X)$ をパフィアン (Pfaffian) という.

^{*27} 符号は, $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ のとき $\text{Pf}(J) = 1$ となるように決める.

線形代数学・同演習 A

7 月 12 日分 演習問題

1. 次の n 次正方行列の行列式を計算せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1+x^2 & -x & 0 & \cdots & 0 \\ -x & 1+x^2 & -x & \ddots & \vdots \\ 0 & -x & 1+x^2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -x \\ 0 & \cdots & 0 & -x & 1+x^2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \lambda & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & c_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & c_{n-1} \end{pmatrix}$$
$$(3) \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda & -1 \\ a_n & a_{n-1} & \cdots & a_2 & \lambda + a_1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1+x_1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2+x_2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 3+x_3 & \cdots & n \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n+x_n \end{pmatrix}$$

2. 次の連立方程式を Cramer の公式を用いて解け.

$$(1) \begin{cases} -2x + y - 4z = 4 \\ 4x - 3y + 4z = -3 \\ -x + y - z = -1 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 2x + 4y - 4z = -3 \\ x + 2y + z = 1 \\ x + 3y + 4z = -3 \end{cases}$$
$$(3) \begin{cases} -3x + 2y + 3z = 2 \\ x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y - 3z = -4 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} -2x + 3y + 2z + w = 0 \\ 2x + 3y + 2z - 2w = 2 \\ 4x + y + z - 2w = 0 \\ -4y + 2z + 3w = 2 \end{cases}$$

3. 次の空間内の三点を通る平面の方程式の標準形を求めよ.

(1) $(1, -2, 2), (0, -1, -4), (-2, -6, 5).$ (2) $(-2, 5, 2), (-2, -2, -1), (1, -3, -2).$
(3) $(5, -5, 1), (-2, -1, -3), (-1, -1, -4).$

4. (1) 2 次元平面上の同一直線上にない 3 点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) を通る円の方程式は次で与えられることを示せ.

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y & x^2 + y^2 \\ 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 + y_1^2 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 + y_2^2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 + y_3^2 \end{vmatrix} = 0$$

- (2) 次の 3 点を通る円の方程式を求めよ.

(a) $(4, 5), (4, 4), (3, 3)$ (b) $(3, 0), (5, 0), (2, -3)$ (c) $(2, -4), (1, -5), (5, 2)$

- (3) 3 点が同一直線上にあるとき, (1) の方程式はどうなるか.

線形代数学・同演習 A

7 月 19 日分 演習問題

1. 次の行列の余因子行列を求めよ．また，その逆行列を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & -5 \\ -5 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2. n 次正方行列 A に対して， $\det \tilde{A} = (\det A)^{n-1}$ を示せ．

3. (1) 次の行列の行列式を計算せよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}$$

(2) a を整数とするととき， A^{-1} の成分がすべて整数になるような a の値を求めよ^{*28}．

- 4.* 2 次正方行列 A の成分が全て整数であるとする． A^{-1} の成分もすべて整数であるならば， $\det(A) = \pm 1$ であることを示せ^{*29}．

本日の講義内容とは離れますが，行列の指数写像 \exp というものを紹介したいと思います^{*30}．

定義． n 次正方行列 A に対して，指数写像 \exp を次で定義する：

$$\exp(A) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k.$$

5. A を任意の n 次正方行列とする．自然数 N に対して，行列 $\sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} A^k$ の (i, j) 成分を $x_{ij}(N)$ とするとき， $\lim_{N \rightarrow +\infty} x_{ij}(N)$ は収束することを示せ．

6. 次の行列を A とするとき，その n 乗 A^n を計算せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7. 問題 6 の行列 A に対して， $\exp(tA)$ ($t \in \mathbb{R}$) を計算せよ．
8. 問題 6, 7 の行列 A および $\exp(tA)$ のトレース tr および行列式に関して，なにか関係はあるか．それはどんな行列に対しても成り立ちそうか．
9. A, B が可換 ($AB = BA$) ならば， $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$ が成り立つことを示せ．また，可換でないときにも成立するか．

^{*28} ヒント：余因子行列を考える．

^{*29} この性質は，一般の n 次のもでも成り立つ．

^{*30} 試験範囲には含めません．この指数写像は“Lie 群と Lie 環”という理論で中心的な役割を果たしますが，他にも常微分方程式などにも応用されています．定義自体は実数における指数写像をそのまま行列に拡張した形ではありますが，その内容は驚くほど多様です．

線形代数学・同演習 A

7 月 26 日分 演習問題

1. 次の行列の固有値と固有ベクトルを求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$
$$(6) \begin{pmatrix} 1 & -8 & 26 \\ 0 & 8 & -18 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 13 & -8 & 24 \\ 24 & -15 & 48 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (9) \begin{pmatrix} 13 & 15 & 6 \\ -10 & -10 & -6 \\ -6 & -9 & -1 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列の固有多項式を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

3. 問題 1 の各行列 A について, 固有値すべての和と $\text{tr}(A)$ が一致すること, および固有値すべての積と $\det(A)$ が一致することを確認せよ.

4. (1) 一般の 2 次正方行列 A の固有多項式 $g_A(t)$ を計算せよ.

(2) 多項式 $g_A(t)$ の t を形式的に A に置き換えた $g_A(A)$ を計算せよ.*³¹

5.* 次の行列の行列の固有多項式と固有値を求めよ.

$$(1) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$$

6.* 問題 4 の結果を利用して, 以下の設問に答えよ.

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ に対して, 次の S, T を A の一次多項式で表わせ.*³²

$$(i) S = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37E_2 \quad (ii) T = S^{-1}$$

(2) 次の行列の n 乗を求めよ.*³³

$$(i) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (ad - bc = 0)$$

7.* 問題 1 の (1)–(5) の各行列について, その n 乗を計算せよ.

8.* 問題 1 の (1)–(5) の各行列 A について, $\exp(A)$ を求めよ.

*³¹ この結果は Cayley–Hamilton の定理と呼ばれている.

*³² 多項式の除法を用いて次数下げを行う.

*³³ 漸化式を作る.

線形代数学・同演習 A

4 月 12 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極的な道筋を説明するに留めています．

1. (1) $\begin{pmatrix} 7 & 7 & 2 \\ -3 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -8 & 12 \end{pmatrix}$ (3) $\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} 46 \\ 59 \end{pmatrix}$ (5) $\begin{pmatrix} -6 & 10 & 23 \end{pmatrix}$ (6) $O_{2,2}$
(7) $\begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (8) $\begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$

2. 略．

3. (1) $(x, y, u, v) = (2, 0, 3, 7)$ (2) $(x, y, u, v) = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 4, 2)$

4. (1) $A + B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (2) $AB - BA = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ (3) $(A + B)(A - B) = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -8 & 4 \end{pmatrix}$ (4)
 $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ (5) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ (6) $A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$

5. (1) $\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) 存在しない． (3) $\frac{1}{ad} \begin{pmatrix} d & -b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ (4) $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

6. (1) A, B, C をそれぞれ $m \times n$ 型, $n \times r$ 型, $r \times s$ 型とし, $A = (a_{ij}), B = (b_{jk}), C = (c_{kl})$ とおく． $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{jk}$ なので，^{*34}

$$((AB)C)_{il} = \sum_{k=1}^r (AB)_{ik}c_{kl} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n (a_{ij}b_{jk})c_{kl} = \sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk}c_{kl}).$$

ここで，総和記号を入れ替えることを考える：

$$\sum_{k=1}^r \sum_{j=1}^n a_{ij}(b_{jk}c_{kl}) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^r a_{ij}(b_{jk}c_{kl}).$$

(今考えている和は有限和なので入れ替えることができる)．さて， k に関する総和記号においては a_{ij} は定数なので， k に関する総和記号の外に出せるので，

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \left(\sum_{k=1}^r b_{jk}c_{kl} \right) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(BC)_{jl} = (A(BC))_{il}.$$

つまり， $((AB)C)_{il} = (A(BC))_{il}$ がすべての (i, l) の組で成り立つので，結局 $(AB)C = A(BC)$ である．

^{*34} $(AB)_{ik}$ で行列 AB の (i, k) 成分を表すこととする．

(2),(3) も同様にできる .

(4) 例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ など . むしろ , $AB = BA$ となるものを探すほうが大変 .

(5) 単位行列は Kronecker のデルタ $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$ を用いると , $E_n = (\delta_{ij})$ と表せることを利用すると , 計算が楽 .

7. $(x, a, b) = (3, 3, 2)$

線形代数学・同演習 A

4 月 19 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．解答が間違えている可能性もありますので，見つけたら連絡ください．

- 2 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ においては $\det A = ad - bc$ である． $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ とおいて， $\det(AB)$ と $\det(A) \det(B) = (ad - bc)(xw - yz)$ をそれぞれ計算し，比較する．
- 平面の方程式は，内積を使えば $(a|x) = d \cdots$ ①と書ける．平面上の点 x_0 は当然 $(a|x_0) = d \cdots$ ②を満たすので，①から②を辺々引けばよい．
- θ を 2 つのベクトルのなす角とする．(1) $\cos \theta = \frac{4}{5}$ (2) $\cos \theta = \frac{11}{14}$ (3) $\cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ (4) $\cos \theta = 0$ (直交している)
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$
- $2y + z = 3$
- (1) $x - 2y + z = 0$ (2) $y + z = 1$ (3) $8x + 14y + 9z = 29$ (4) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$
- (a) $x = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ，よって $5x + 11y - 2z = -58$. (b) $5x + 11y - 2z = 3$ (求める平面は直線 l_1, l_2 に平行なので (a) と同じ法線ベクトルを持つ．)
- $\frac{1}{3}$. 平面において原点と直線との距離を与える方向は，直線と垂直になる方向であったように，3 次元空間において原点と平面との距離を与える方向は平面に沿う方向と垂直な方向である．*35それは問題 2 より法線ベクトル $a = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ である．そこで，原点と平面との距離を d で表すと，空間上の点 $d \cdot \frac{a}{\|a\|}$ は平面上にあるので， $(a|d \cdot \frac{a}{\|a\|}) = 1$ を満たす．これより $d = \frac{1}{\|a\|} = \frac{1}{3}$.
- $\sqrt{\frac{26}{3}}$. $x = 1 + s, y = -5 - s, z = 2 + s$ なので， $d(s) := (1 + s)^2 + (-5 - s)^2 + (2 + s)^2$ が最小になるような s を求めればよい．
- (1) $(0, -8, 0)$ (2) $(1, 1, -2)$
- (a) 直線 $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$ (b) 直線 $x = \begin{pmatrix} -2 \\ 7/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$ (c) 直線 $x = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R})$

*35 後期に微積分で習う偏微分を使っても求めることができる．

線形代数学・同演習 A

4 月 26 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は雑な道筋を説明するに留めています．

1. 講義中の 2×2 のときと同様． e_j を j 行目のみ 1 でそれ以外は 0 であるベクトルとすれば，
 $\boldsymbol{x} = {}^t(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ は

$$\boldsymbol{x} = x_1 \boldsymbol{e}_1 + \dots + x_n \boldsymbol{e}_n$$

と書けることに注意． f の線形性より $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{j=1}^n x_j f(\boldsymbol{e}_j)$ なので， $f(\boldsymbol{e}_j) = {}^t(a_{1j}, \dots, a_{mj})$ とおけば $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x}$ である．ただし， $A = (a_{ij})$ ．

2. 2 点 $(0, 1)$ と $(0, 1)$ が移動する点を考えればよい．この 2 点は原点の隣にあるので，移ることができる点は $(1, 2)$ と $(-1, 2)$ ．よって $f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ， $f_2(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ．

3. (固有値，固有ベクトル) の順．

- (1) $(1, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix})$
 (2) $(5, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$, $(-3, \begin{pmatrix} 1 \\ -7 \end{pmatrix})$
 (3) $(2 + 2\sqrt{3}i, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -2i \end{pmatrix})$, $(2 - 2\sqrt{3}i, \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 2i \end{pmatrix})$
 (4) $(\cos \theta + i \sin \theta, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix})$, $(\cos \theta - i \sin \theta, \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix})$

4. 直線と平面の一般の点 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2$ との距離を d とすれば，この鏡映写像 f は $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x} \pm 2d \cdot \frac{\boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\|}$ のように書ける (直線と点の位置に応じて符号を付ける) ．

(1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \end{pmatrix}$, (2) $f_2 = \frac{1}{a^2+1} \begin{pmatrix} 1-a^2 & 2a \\ 2a & a^2-1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \frac{2b}{a^2+1} \begin{pmatrix} a \\ -1 \end{pmatrix}$. *36

5. 解法は 4 と同様．

(1) $f_1(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \frac{16}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (2) $f_2(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{21} \begin{pmatrix} 13 & 16 & -4 \\ 16 & -11 & 8 \\ -4 & 8 & 19 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \frac{10}{21} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
 (3) $f_3(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{a^2+2} \begin{pmatrix} a^2 & -2 & -2a \\ -2 & a^2 & -2a \\ -2a & -2a & 2-a^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \frac{2a}{a^2+2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$. *37

6. (1) 平面のパラメータ表示 $\boldsymbol{x} = s\boldsymbol{a} + t\boldsymbol{b}$ ($s, t \in \mathbb{R}$) を標準型にもどせばよい．各成分ごとに見ると $x = a_1s + b_1t$, $y = a_2s + b_2t$, $z = a_3s + b_3t$ なので， x, y に関する式を解いて*38

$$s = \frac{b_2x - b_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}, \quad t = \frac{-a_2x + a_1y}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

これを z の式に代入して式を整理すれば，求める式を得る．

- (2) 定義に従って計算するのみ．(3) $(\boldsymbol{a} | \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\| \cdot \|\boldsymbol{b}\| \cos \theta$ より．(4) (3) で求めた外積の表示より明らか．(5) 同じく (3) で求めた外積の表示を用いて地道に計算するだけ．

*36 このような写像 $f(\boldsymbol{x}) = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$ をアファイン写像と呼ぶ．ちなみに，直線 $ax + by = c$ に関する鏡映写像 f は $f(\boldsymbol{x}) = (E_2 - \frac{2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a} {}^t \boldsymbol{a}) \boldsymbol{x} + \frac{2c}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a} = \frac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} b^2-a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2-b^2 \end{pmatrix} \boldsymbol{x} + \frac{2c}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ となる．

*37 平面 $ax + by + cz = d$ に関する鏡映は $f(\boldsymbol{x}) = (E_3 - \frac{2}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a} {}^t \boldsymbol{a}) \boldsymbol{x} + \frac{2d}{\|\boldsymbol{a}\|^2} \boldsymbol{a}$ とかける．

*38 講義初回に紹介した逆行列を用いる方法が簡単．もちろん掃き出し法でも計算できる．

線形代数学・同演習 A

4 月 26 日分 演習問題

4. 最初に, 直線の方程式は, 内積を使って $(x|a) = c$ と書けることに注意する. ここで $a = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ は法線ベクトルである.

平面の一般の点 x と直線との距離 d を求める. それには, 4 月 19 日の問題 8 より, x から法線ベクトルの方向に沿っての長さを測ればよい. $x + d \frac{a}{\|a\|}$ が直線上にあるとすると,

$$\left(x + d \frac{a}{\|a\|} \mid a \right) = c$$

なので (冒頭の注意),

$$d = \frac{c - (x|a)}{\|a\|}.$$

さて, 鏡映写像 f は $f(x) = x + 2d \frac{a}{\|a\|}$ であるので (符号は d に入っている),

$$f(x) = x + 2 \cdot \frac{c - (x|a)}{\|a\|} \cdot \frac{a}{\|a\|}. \quad (1)$$

あとは式を整理すれば, $(x|a) = {}^t x a = {}^t a x$ を用いて,

$$f(x) = (E_2 - \frac{2}{\|a\|^2} a {}^t a) x + \frac{2c}{\|a\|^2} a = \frac{1}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} b^2 - a^2 & -2ab \\ -2ab & a^2 - b^2 \end{pmatrix} x + \frac{2c}{a^2 + b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

となる. もちろん, (1) のままでも計算できる.

平面に関する鏡映写像も, 同じ考え方で計算できる.

線形代数学・同演習 A

5 月 10 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極的な道筋を説明するに留めています．

1. 以下のとおり．

- (1) $(x, y, z) = (5/2, 4, 13/2)$
- (2) $(x, y, z) = (-9, 6, 4)$
- (3) $(x, y, z) = (49, 173, -132)$
- (4) $(x, y, z) = (-1, 2, 3)$
- (5) $(x, y, z) = (2, -1, 5)$
- (6) $(x, y, z) = (1, 1, 1)$
- (7) $(x, y, z, w) = (-2, 2, -2, 1)$
- (8) $(x, y, z, w) = (-59, 85, 82, -89)$
- (9) $(x, y, z, w, u) = (-188, -118, 116, -97, 5)$
- (10) $(x, y, z, w, u) = (1, 0, -1, 0, 1)$

2. (i, j) 成分が 1 でそれ以外は 0 である (m 次の) 正方行列を E_{ij} で表す．また，対角成分が d_1, \dots, d_m である対角行列を $\text{diag}(d_1, \dots, d_m)$ と表す．また， E_m は m 次の単位行列．

$$\begin{aligned} D_i(\lambda) &= \text{diag}(1, \dots, 1, \overset{i}{\lambda}, 1, \dots, 1) \\ F_{ij}(\lambda) &= E_m + \lambda E_{ij} \\ W_{ij} &= E_m + (E_{ij} + E_{ji}) - (E_{ii} + E_{jj}) \end{aligned}$$

3. $D_i(\lambda)^{-1} = D_i(\frac{1}{\lambda})$, $F_{ij}(\lambda)^{-1} = F_{ij}(-\lambda)$, $W_{ij}^{-1} = W_{ij}$.

4. (1) $\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$, (2) 持たない, (3) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

5. a, b, c が互いに相異なるとき唯一の解を持ち，その解は

$$(x, y, z) = \left(\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)}, \frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)}, \frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} \right).$$

線形代数学・同演習 A

5 月 17 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は雑な道筋を説明するに留めています．

- (a) 階数は主成分の数であるが，主成分は各行各列に一つずつしか存在できないため．
(b) あとで
- 階数は (1) 3, (2) 3, (3) 2, (4) 2, (5) 3.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 5 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 7 & 5 \\ 0 & 1 & -5 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (2) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,
(3) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (4)–(7) 解なし, (8) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
- $(a, b, c) = (6/5, -3, 2)$ or $(1/2, 1/2, 2)$.

行列の列を入れ替えても行列の階数は変わらないことを利用すると楽．

線形代数学・同演習 A

5 月 24 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は雑な道筋を説明するに留めています．

$$1. \quad (1) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$(3) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ u \\ v \end{pmatrix} = t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (4) \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$(1) \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -5 & -5 \\ 2 & -19 & -22 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -14 & 10 & -7 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \text{ 逆行列なし}$$

$$(4) \begin{pmatrix} 10 & 27 & -4 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \text{ 逆行列なし} \quad (6) \begin{pmatrix} -363 & 545 & -181 & -35 \\ -72 & 108 & -36 & -7 \\ 42 & -64 & 21 & 4 \\ -10 & 15 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(7) \begin{pmatrix} 34 & 124 & -10 & -7 \\ 10 & 36 & -3 & -2 \\ 2 & 11 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8) \text{ 逆行列なし}$$

3. B, C が共に A の逆行列とすると， $BA = E_n, AC = E_n$ が成り立つ．ここで，これら 3 つの積 BAC を計算してみると，結合法則より，

$$C = E_n \cdot C = (BA)C = B(AC) = B \cdot E_n = B.$$

したがって， $B = C$ ．

4. (a) 問題 3 の結果と， $A(A^{-1}) = (A^{-1})A = E_n$ より．

(b) 問題 3 の結果と， $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}B = E_n$ より．

(c) ならない．たとえば， $A = E_n, B = -E_n$ とすれば，いずれも正則であるが， $A + B = O_n$ は明らかに正則ではない．

5. (1) $(a, b) = (1, 1)$ のとき 3 次元， $(a, b) \neq (1, 1)$ のとき 2 次元．

(2) $(a, b) = (-1, -1)$ のとき 2 次元， $(a, b) \neq (-1, -1)$ のとき 1 次元．

6. 略．適当なプログラミングの本を参照してください．

線形代数学・同演習 A

5 月 31 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極的な道筋を説明するに留めています．

- (1) ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A$ より．
(2) (1) と同様
(3) (1) のものと (2) のものの和が丁度 A になっている．
- いずれも定義に従って計算するだけ．
- $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ である．あとはべき乗を計算するだけ．
- (1) $\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$ (2) $\frac{1}{6}n^2(n+1)(2n+1)$ (3) $\frac{1}{24}n(n+1)(n+2)(3n+1)$
(4) $\frac{1}{12}n(n+1)(7n^2+13n+4)$
- $\sum_{l=0}^{m+n-k} a_l b_{m+n-k-l}$
- 右辺から計算していく．

$$e(x)e(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{y^m}{m!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^n y^m}{n! m!}.$$

ここで， $k = m + n$ ， $l = n$ と変数変換すると， $m = k - l$ なので，

$$e(x)e(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{x^l}{l!} \frac{y^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \sum_{l=0}^k \frac{k!}{l!(k-l)!} x^l y^{k-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}.$$

したがって， $e(x)e(y) = e(x+y)$ となる．^{*39}

- $\sum_{i=1}^{\min(l,m,n)} a_{ii}^2$
- $(1+x)^n$
- (1) 右辺の \sum を展開すればよい．
(2) (1) の右辺の \sum の中を，問題 8 を使って展開して，和の順序を入れ替える．
(3) (2) の式を， $C_k(n) = \dots$ の形で書けばよい．
(4) 以下のとおり．

$$C_4(n) = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30} = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1),$$
$$C_5(n) = \frac{2n^6 + 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12} = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

^{*39} お気づきかとは思いますが， $e(x) = e^x$ です．

線形代数学・同演習 A

6 月 14 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極的な道筋を説明するに留めています．

1. (1) 7

(2) $a^2 + b^2$

(3) 36

(4) -12

(5) -10

(6) 0

(7) $1 + a^2 + b^2 + c^2$

2. (1) $(a-b)(a-b)(a-c)$

(2) $-(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$

(3) $(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

(4) $2(a+b+c)^3$

3.

$$(1) \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 115 \\ 7 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$$

4. x, y を任意の \mathbb{R}^n のベクトルとし，実数 t を任意にとる．このとき，ベクトル $tx + y$ を考える．ノルム $\|\cdot\|$ の定義および内積 $(\cdot|\cdot)$ の双線形性から

$$0 \leq \|tx + y\|^2 = (tx + y|tx + y) = \|x\|^2 \cdot t^2 + 2(x|y) \cdot t + \|y\|^2.$$

つまり， t に関する 2 次関数 $\|x\|^2 \cdot t^2 + 2(x|y) \cdot t + \|y\|^2$ が常に ≥ 0 である事がわかる．これより，この二次関数多項式の判別式は常に ≤ 0 となるので，

$$(2(x|y))^2 - 4\|x\|^2 \cdot \|y\|^2 \leq 0,$$

つまり， $|(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$ ．

5. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とすれば， $\text{tr}(A) = a + d$ ， $\det(A) = ad - bc$ なので， $A^2 - \text{tr}(A)A + \det(A)E_2$ を普通に計算すれば良い．

6. 求める体積は $|(b-a|(c-a) \times (d-a))|$ なので， $(x, y, z) := (x|y \times z)$ という記号を導入すれば，

$$|(a, b, c) - (b, c, d) + (c, d, a) - (d, a, b)|.$$

7. 略．

8. 成立しない．反例として $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ， $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ．成り立たないほうが普通である．

9. (1) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix}$ ， $\det=1$ ，(2) 解を持たない， $\det=0$ ．

10. (1) $2\det(A)$ (2) $-\det(A)$ (3) $\det A$

線形代数学・同演習 A

6 月 21 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極的な道筋を説明するに留めています．

1. 偶置換は

$$\begin{aligned} &\varepsilon, \\ &(1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4), \\ &(1, 3, 2), (1, 4, 2), (1, 4, 3), (2, 4, 3), \\ &(1, 2) \circ (3, 4), (1, 3) \circ (2, 4), (1, 4) \circ (2, 3) \end{aligned}$$

の 12 個．そして奇置換は

$$\begin{aligned} &(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4), \\ &(1, 2, 3, 4), (1, 2, 4, 3), (1, 3, 2, 4), \\ &(1, 4, 3, 2), (1, 3, 4, 2), (1, 4, 2, 3) \end{aligned}$$

の 12 個．

- 1 が移り得るのは n 通り，2 が移り得るのは $(n-1)$ 通り，と順に移れる可能性を考えていくと， k が移り得るのは $(n-k+1)$ 通りの可能性があることが分かる．よって， S_n は $\prod_{k=1}^n (n-k+1) = n!$ 個の元がある．
- (1) 1 (2) 1 (3) -1
- 例えば (1) では， $(12) \circ (34) = (34) \circ (12) = (34) \circ (23)(23) \circ (12)$ など．
- σ を巡回置換とすると，その定義より，巡回域に属さない数 k に対しては $\sigma(k) = k$ である．さて，そのことを踏まえると， k が巡回置換 σ, τ どちらの巡回域にも属さないのならば， $(\sigma \circ \tau)(k) = (\tau \circ \sigma)(k) = k$ である．次に， k が σ の巡回域に属しているが τ の巡回域には属していないとする．つまり， $\tau(k) = k$ ．このとき， σ と τ は互いに素であるため， $\sigma(k)$ は τ の巡回域に属さない．したがって，

$$(\tau \circ \sigma)(k) = \tau(\sigma(k)) = \sigma(k) = \sigma(\tau(k)) = (\sigma \circ \tau)(k).$$

k が τ の巡回域に属しているが σ の巡回域には属していないときも同様に示せる．

- (1) $(13672) \circ (45)$ (2) $(1356) \circ (24)$
- (1) 多項式 $x_j - x_i$ に互換を施すと $-(x_j - x_i)$ となる．次に p, q ($q \geq p$) が共に i, j のいずれでもない場合は当然 $x_q - x_p$ は変わらない．さて，自然数 k を次の 3 つの場合にわけて考える: (i) $k \leq i$; (ii) $i \leq k \leq j$; (iii) $j \leq k$. (i) のとき， k と i, j が現れるものは $x_i - x_k$ と $x_j - x_k$ の二つで，これは互換 (i, j) で互いに入れ替わる．つまり符号は変わらない．(ii) のとき， k と i, j が現れるものは $x_k - x_i$ と $x_j - x_k$ の二つで，これは互換 (i, j) を施すとそれぞれ $-(x_j - x_k)$ と $-(x_k - x_i)$ となる．つまり，これら二つのマイナスが打ち消し合って，全体の符号は変わらない．最後に (iii) のとき， k と i, j が現れるものは $x_k - x_i$ と $x_k - x_j$ の二つで，これは互換 (i, j) で互いに入れ替わる．つまり符号は変わらない．
以上より，互換 $\sigma = (i, j)$ に対して， $(\sigma \Delta)(x) = -\Delta(x)$ が示された．

(2) 前半部分は問題が間違っていたようです: $((\sigma \circ \tau)\Delta)(x) = (\tau(\sigma\Delta))(x)$. 証明は, 差積が Vandermonde の行列式を使ってかけることを使えばすぐできます^{*40}. 後半は (1) と前半を合わせると出ます.

8. (1) (a) 対称式でない (b) 対称式でない (c) 対称式でない

勘違いで, すべて非対称なものになっていました.

- (2) (a) $t_1^2 - 2t_2$ (b) $t_1^3 - 3t_1t_2 + 3t_3$ (c) $-4t_1^3t_3 + t_1^2t_2^2 + 18t_1t_2t_3 - 4t_2^3 - 27t_3^2$

^{*40} これはここで定義した作用が, 通常のもとは異なるために生じた間違いです: 通常は $(\sigma f)(x_1, \dots, x_n) := f(x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(n)})$ と定めます. こうすると, $((\sigma \circ \tau)f)(x) = (\sigma(\tau f))(x)$ となります.

線形代数学・同演習 A

6 月 28 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極拳な道筋を説明するに留めています．

1. (1) 63 (2) -40 (3) -42 (4) 54 (5) 100 (6) 41 (7) 256
(8) 52 (9) -3 (10) 118 (11) 3684 (12) -400 (13) 0 (14) 6
2. (i) $\det A = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) = a^3+b^3+c^3-3abc$, $\det W = -3\sqrt{3}i$
(ii) ω は 1 の三乗根であることに注意すると，例えば AW の 2 列目は

$$\begin{pmatrix} a+b\omega+c\omega^2 \\ c+a\omega+b\omega^2 \\ b+c\omega^2+a\omega \end{pmatrix} = (a+b\omega+c\omega^2) \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \end{pmatrix}$$

となる．行列式は 1 次同次なので，

$$\det(AW) = (a+b+c)(a+b\omega+c\omega^2)(a+b\omega^2+c\omega)\det(W)$$

となる．あとは行列式の積公式^{*41}を使えば， $\det(W) \neq 0$ であるので，与式を得る．

3. $B = \begin{pmatrix} b & c & 0 \\ a & 0 & c \\ 0 & a & b \end{pmatrix}$ とすればよい^{*42}．このとき $\det(B) = 2abc$ なので， $\det(A) = \det(B)\det({}^tB) = 4a^2b^2c^2$ となる^{*43}．

^{*41} 出題時点ではまだ積公式を紹介していなかったので，出題ミスではありますが...

^{*42} どうやって見つけるのかは難しいところだが A の (1,1) 成分から， B の 1 行目に b, c があるだろう，というところから構成していくとよい．なお，この B は一意に決まるわけではない（少し難しい言葉で説明すると，直交群の分だけ自由度がある）．

^{*43} これも行列式の積公式を使うのを失念していました．

線形代数学・同演習 A

7 月 5 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．

1. $A = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)$, $B = (b_{ij}) = (\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ のように表す．また $AB = (c_{ij}) = (\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n)$ とおく．さて， $AB = (Ab_1, \dots, Ab_n)$ であるので， $c_j = Ab_j = \sum_{i=1}^n b_{ij} \mathbf{a}_{i_j}$ とかける．よって

$$\det(AB) = \det(\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n) = \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_n=1}^n b_{i_1 1} b_{i_2 2} \cdots b_{i_n n} \det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})$$

である．ここで， $\det(\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \dots, \mathbf{a}_{i_n})$ は i_1, i_2, \dots, i_n がすべて異なるとき以外は 0 になるので， i_k を置換 $\sigma \in S_n$ を用いて $i_k = \sigma(k)$ と表すことができることに注意する．これより

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)})$$

であるが， $\det(\mathbf{a}_{\sigma(1)}, \mathbf{a}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{a}_{\sigma(n)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \det(A)$ なので，

$$\det(AB) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) b_{\sigma(1)1} b_{\sigma(2)2} \cdots b_{\sigma(n)n} \cdot \det(A) = \det(A) \det(B)$$

を得る．

2. (1) 109 (2) 8 (3) 20 (4) -968 (5) -730 (6) 1185
(7) 22 (8) 33 (9) 11 (10) 112 (11) -1207
3. (a) 右辺を計算すれば左辺になる．
(b) 行列式の積公式と (a) を用いる．
4. (1) $i = 1, \dots, n$ に対して， $n + i$ 行の λ 倍を i 行目に加える行基本変形を，行えばよい．
(2) はじめに (1) の結果は列に関しても成り立つことに注意する．

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} A+B & B+A \\ B & A \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A+B & (B+A) - (A+B) \\ B & A-B \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} A+B & O \\ B & A-B \end{vmatrix} = |A+B| |A-B|. \end{aligned}$$

5. まず n が奇数のとき．このときは行列式の性質から

$$\det(X) = \det(-{}^tX) = (-1)^n \det({}^tX) = -\det(X)$$

なので， $\det(X) = 0$ となることが分かる．さて， $n = 2p$ (偶数) のとき．このときは，問題 3 を用いると計算が楽である (単純に基本変形を用いても同様にできる)． X を n 次の交代行列とし，それを

$$X = \begin{pmatrix} aJ & {}^tB \\ B & Y \end{pmatrix}; \quad a \in \mathbb{R}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{cases} B \text{ は } (n-2) \times 2 \text{ 行列} \\ Y \text{ は } n-2 \text{ 次の交代行列} \end{cases}$$

のようにブロック分割する． $n = 2$ ならば交代行列 X は $X = aJ$ の形であり，このとき $\det(X) = a^2$ なので確かに (多項式)² の形をしている．ここで $J^{-1} = {}^t J = -J$ であることに注意しよう．さて，問題 3 より

$$\det X = \det(aJ) \det(Y - B(aJ)^{-1} {}^t B) = a^{2-2p} \det(aY - BJ {}^t B) \quad (n = 2p)$$

となる． $Z := aY - BJ {}^t B$ とおけば， Z は交代行列となるため，帰納法の仮定より $\det(Z) = \text{Pf}'(Z)^2$ となる多項式 $\text{Pf}'(Z)$ がある．これを用いれば，

$$\det(X) = (a^{1-p} \text{Pf}'(Z))^2$$

であるため，あとは $\text{Pf}(X) := a^{1-p} \text{Pf}'(Z)$ が多項式であることを示せばよい．ここで左辺 ($= \det(X)$) は当然多項式である．一方で， $\text{Pf}(X)$ がもし多項式関数ではない有理関数^{*44}ならば，その自乗も多項式関数ではない有理関数になっているはずである．これが多項式と等しいということなので， $\text{Pf}(X)$ 自体が多項式でなければならない．

6. $\text{Pf}(A) = af - be + cd.$

^{*44} 有理関数とは，二つの多項式 $f(x), g(x)$ を用いて $\frac{f(x)}{g(x)}$ と表わされる関数のこと．

線形代数学・同演習 A

7 月 12 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は太極的な道筋を説明するに留めています．

1. (1) $\sum_{k=0}^n x^{2k} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}$
(2) $\lambda c_1 \cdots c_{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k b_k c_1 \cdots \overset{\vee}{c}_k \cdots c_{n-1}$ *45
(3) $\sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k} = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \cdots + a_n$ (ただし $a_0 := 1$ とおいた)
(4) $x_1 x_2 \cdots x_n + \sum_{k=1}^n k x_1 x_2 \cdots \overset{\vee}{x}_k \cdots x_n$
2. $(x, y, z, w) =$
(1) $\frac{1}{2}(-13, -14, 1)$ (2) $\frac{1}{6}(79, -39, 5)$ (3) $\frac{1}{8}(10, -1, 16)$ (4) $\frac{1}{7}(-10, -10, 14, -18)$
3. (1) $3x - 3y - z = 7$ (2) $4x - 9y + 21z = -11$ (3) $4x + 11y + 4z = -31$
4. (1) 与えられた方程式は $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$ の形であり，三点が同一直線上にないという仮定から $a \neq 0$ となるため，この方程式は円を表すことが分かる．また， $(x, y) = (x_i, y_i)$ ($i = 1, 2, 3$) とすれば行列式の性質から左辺は 0 になるので，この円は三点 (x_i, y_i) ($i = 1, 2, 3$) を通っていることが分かる．
(2) (a) $x^2 - 5x + y^2 - 9y + 24 = 0$ (b) $x^2 - 8x + y^2 + 4y + 15 = 0$ (c) $x^2 + 15x + y^2 - 9y - 86 = 0$
(3) 三点が同一直線上にあるとき，(1) の記号を用いれば $a = 0$ ということになる．このときには方程式は $bx + cy + d = 0$ となり，これは直線になる（或いは，もっと退化して情報を何も持たなくなってしまう可能性もある）．

*45 ここで $c_1 \cdots \overset{\vee}{c}_k \cdots c_{n-1}$ は c_1, c_2, \dots, c_n の積のうち， c_k だけ除外する，という意味である．

線形代数学・同演習 A

7 月 19 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は大雑把な道筋を説明するに留めています．突貫で作成したので，誤りがある可能性が高いので注意してください（前半は大丈夫だと思いますが）．

1. 余因子行列を \tilde{A} ，逆行列を A^{-1} とする．

$$(1) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & -12 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & -14 & -12 \end{pmatrix}$$

$$(2) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -18 & -11 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ -5 & -18 & -11 \end{pmatrix}$$

$$(3) \tilde{A} = \begin{pmatrix} 8 & -6 & -11 \\ -13 & 7 & 22 \\ -9 & 4 & 11 \end{pmatrix}, A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 8 & -6 & -11 \\ -13 & 7 & 22 \\ -9 & 4 & 11 \end{pmatrix}$$

2. まず $\det(A) \neq 0$ とする．このとき， $A\tilde{A} = (\det A)E_n$ の両辺の \det をとれば，行列式の積公式より

$$\det(A) \det(\tilde{A}) = \det(|A|E_n) = (\det(A))^n$$

であるので， $\det(\tilde{A}) = (\det(A))^{n-1}$ ．次に， $\det(A) = 0$ とする． $A = O$ ならば明らかなので $A \neq O$ とする．このとき，もし $\det(\tilde{A}) \neq 0$ ならば， \tilde{A} は逆行列 B を持つことになるが， $A\tilde{A} = 0E_n = O$ の両辺に右から B をかけると $A = O$ となってしまう．

3. (1) $\det A = 2a - 7$

(2) $a = 3, 4$

4. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とする．このとき $|A| = ad - bc$ である．さて A^{-1} は

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であるので，この成分が全て整数であるとするとき，

$$\frac{a}{|A|}, \quad \frac{b}{|A|}, \quad \frac{c}{|A|}, \quad \frac{d}{|A|}$$

がすべて整数になっていることになる．したがって，

$$a = a'|A|, \quad b = b'|A|, \quad c = c'|A|, \quad d = d'|A|$$

となる整数 a', b', c', d' が存在することになる．このとき， $|A| = ad - bc = |A|^2(a'd' - b'c')$ であるので，

$$a'd' - b'c' = \frac{1}{|A|}$$

となるが，左辺は整数の和と積なので整数であるが，右辺は $|A| \neq \pm 1$ ならば整数になり得ない．したがって， $|A| = \pm 1$ でなければならない．

5. $\max := \max_{i,j} |a_{ij}|$ とおく (A の成分の中で絶対値が最も大きいもの)．さて，すべての成分が 1 である $n \times n$ 行列を I と書くと， $I^k = n^k I$ となる．これを用いると，行列 X の (i, j) 成分を $(X)_{ij}$ と書くことにすれば，

$$|(A^k)_{ij}| \leq |((\max I)^k)_{ij}| = (n \max)^k$$

となる．ここで Cauchy 列

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| \quad (M > N)$$

を考える．

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| = \left| \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{k!} (A^k)_{ij} \right| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{1}{k!} |(A^k)_{ij}| \leq \sum_{k=N+1}^M \frac{(n \max)^k}{k!}$$

であり，指数関数 $e^x = \sum_k \frac{x^k}{k!}$ は収束するので， $M, N \rightarrow \infty$ のとき

$$|x_{ij}(M) - x_{ij}(N)| \rightarrow 0$$

となる．

$$6. \quad (1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad n = 2k \text{ のとき } , (-1)^k E_2, \quad n = 2k + 1 \text{ のとき } , (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(4) \quad (5) \quad n = 1 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n = 2 \text{ のとき } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad n \geq 3 \text{ のとき } , O.$$

$$7. \quad (1) \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} e^t & 2te^t \\ 0 & e^t \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad n = 3k \text{ のとき } A^n = E_2,$$

$$n = 3k + 1 \text{ のとき } A^n = A, \quad (A^3 = E \text{ なので})$$

$$n = 3k + 2 \text{ のとき } A^n = A^2 = -A - E$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

8. $\det(\exp(tA)) = e^{\text{tr} A}$ という関係が成立する．これは， $A = PDP^{-1}$ と対角化^{*46}としたとき，

$$\exp(tA) = \sum_k \frac{t^k}{k!} (PDP^{-1})^k = P \sum_k \frac{t^k}{k!} D^k P^{-1} = P(\exp tD)P^{-1}$$

^{*46} 実際は Jordan 標準形まで考えないといけないが...

と，対角行列 D の指数写像の共役 (P と P^{-1} で挟んだ形) になることからわかる．実際， D を対角に d_1, \dots, d_n が並んでいるとすると， $\exp(tD)$ は対角に $e^{td_1}, \dots, e^{td_n}$ が並んでおり，

$$\det \exp(tA) = \det P \exp(tD) P^{-1} = \det \exp(tD) = \prod_j (e^{td_j}) = e^{\sum_j td_j}.$$

ここで $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} D$ であることを思い出せば， $\det(\exp(tA)) = e^{t \operatorname{tr} A}$ という関係が得られる．

9. A と B が可換ならば $(A+B)^n = \sum_k {}_nC_k A^{n-k} B^k$ が成り立つので，後は実数の時と同様に証明できる．

例えば $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$, $B = -\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば， $A+B = a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ なので $\exp(A+B) = \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}$ ．一方で， $\exp A = eA$, $\exp B = -e^{-1}B$ なので，

$$\exp(A) \exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & a^2 + 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \cos a & -\sin a \\ \sin a & \cos a \end{pmatrix}.$$

線形代数学・同演習 A

7 月 26 日分 演習問題

計算問題は解答のみ，証明問題は雑な道筋を説明するに留めています．

1. 固有ベクトルは，対応する固有値と同じ順番で並んでいる．

$$(1) \lambda = 5, -3, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$(2) \lambda = -1, 1, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) \lambda = 3, 2, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(4) \lambda = i, -i, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(5) \lambda = 2, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(6) \lambda = 2, -1, 1, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(7) \lambda = 3, 1, 1, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(8) \lambda = -3, 1, 1, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(9) \lambda = 2, -1, 1, \text{ 固有ベクトル} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$2. (1) t^3 - 21t - 68 \quad (2) t^3 + 4t^2 - 4t - 21 \quad (3) t^3 + 2t^2 - 7t - 48$$

3. 略．

$$4. (1) A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ とすれば,}$$

$$g_A(t) = t^2 - (a + d)t + (ad - bc).$$

(2) $g_A(A) = O$ (零行列) となる．

$$5. (1) g_A(t) = t^2 + 2(\cos \theta)t + 1, \lambda = \cos \theta \pm i \sin \theta$$

$$(2) g_A(t) = t^2 + (a+c)t - (ac-b^2), \lambda = \frac{-a-c \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2}$$

(根号の中が非負なので，常に実固有値を持つことが分かる)

$$(3) g_A(t) = t^3 + (a^2 + b^2 + c^2)t, \lambda = 0, \pm i\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

6. (1) 問題 4 より $A^2 - 6A + 7E = O$ が成り立つ．この左辺の A を x に置き換えた多項式で， S の A を x に置き換えた多項式を割ることを考えると

$$2x^4 - 12x^3 + 19x^2 - 29 = (x + 37x^2 - 6x + 7)(2x^2 + 5) + x + 2$$

なので，ここで x を A に書き換えてもこの等式は成立するので^{*47}， $S = A + 2E$ ．

(ii) は，2 次の正方行列は，問題 4 の結果より $aA + bE$ の形に書けることを利用すると楽．

$$(i) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \quad (ii) \frac{1}{23}(-A + 8E) = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2) (i) は問題 4 の結果より $aA + bE$ の形に書けることを利用すると楽．(ii) は $A^{n+2} - (a+d)A^{n+1} + (ad-bc)A^n = O$ が成り立つので，隣接三項間の漸化式を立てる方法がよい(と思う)．(iii) のようなときはそのまま計算するほうが速い．

$$(i) A^n = 3^{n-1}(nA - 3(n-1)E) = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3-2n & 2n \\ -2n & 3+2n \end{pmatrix}$$

(ii) $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$, $\beta = 1 - 2\sqrt{2}$ とおけば，

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2(\alpha^n + \beta^n) & -\sqrt{2}(\alpha^n - \beta^n) \\ -2\sqrt{2}(\alpha^n - \beta^n) & 2(\alpha^n + \beta^n) \end{pmatrix}$$

(iii) $A^n = (a+d)^{n-1}A$ ($n \geq 1$)．

$$7. (1) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7 \cdot 5^n + (-3)^n & 5^n - (-3)^n \\ 7 \cdot 5^n - 7(-3)^n & 5^n + 7(-3)^n \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 + 2(-1)^n & 1 + (-1)^{n+1} \\ 2(-1 + (-1)^n) & 2 + (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2^{n+1} - 3^n & 2(2^n - 3^n) \\ -2^n + 3^n & -2^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 2^n & n \cdot 2^{n-1} \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

$$(4) n = 2k \text{ のとき, } (-1)^k E_2, \quad n = 2k + 1 \text{ のとき, } (-1)^k \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. 以下では $\exp(tA)$ を計算している．

$$(1) \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 7e^{5t} + e^{-3t} & e^{5t} - e^{-3t} \\ 7(e^{5t} - e^{-3t}) & e^{5t} + 7e^{-3t} \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -e^t + 2e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ 2(-e^t + e^{-t}) & 2e^t - e^{-t} \end{pmatrix}$$

$$(3) \begin{pmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} & 2(e^{2t} - e^{3t}) \\ -e^{2t} + e^{3t} & -e^{2t} + 2e^{3t} \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$$

^{*47} 現れる行列は A もしくは E であり，すべて可換であるから．ここで，定数項は E の倍数に書き換える