

# 線形代数学・同演習 A

4月12日分 質問への回答

質問 次からがんばります。

— 頑張ってください。

質問 むずかしいです。

— 積の計算に慣れるまでが大変ですが、頑張りましょう。

質問 ていねいで理解しやすかった。

— そう言っていただけると嬉しいです。

質問 分かり易かったです、講義ありがとうございました。

— そう言っていただけると嬉しいです。

質問 かけ算は注意しないと数字をまちがえそうで少しこわい。

— 計算の仕方なのですが、簡単な積と和を大量に行うことになるのでそこで計算間違いが起こりやすいです。

質問 矢継ぎばやに新しいことが記述されるため、予習が必要と感じた。

— 大学の講義ではどうしてもそうなってしまいます...頑張ってください。

質問 授業の途中で学生に手を動かして解かせた方が良いのではと思った。

— 出来ればそうしたいのですが、小テストがそれに変わるものと思ってください。

質問 もう1学期、どうかお付き合いください...

— ええと、こちらこそよろしくおねがいします。

質問 初めて行列を勉強するので最初の方はとまどったけれど演習などをくり返し慣れていきたい

— 行列は数学の色々なところに出てきます。この講義以外でどのように使われるかなども合わせて、行列とはどういったものかイメージを掴んでいければいいかと思います。

質問  $A = a_{ij}$  という表記があまりよく分かりずらかった

—  $A = (a_{ij})$  ですね (括弧が必要)。一般論をしようとするときに、毎回

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と書くのはとても面倒なので、 $A = (a_{ij})$  と書いて 1 を表すことにしようという事です。

質問 逆行列の定義がまだよく分かりません。

— 定義は、正方行列  $A$  に対して、 $AB = BA = E$  を満たす (正方) 行列  $B$  を  $A$  の逆行列、というわけですが、第1回はそういった行列もありますよという紹介

だけで、詳しくは後日改めてします。

質問  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = a_{ij}$  とかけるのはすべての成分が  $a$  という数であるときということですか。

— 違います。ここで  $a$  という記号を使っているのは行列  $A$  の要素だから + 数としては小文字を使うという講義内の約束があるから、です。一般の行列を扱うとすると、どうしてもこうした表記が必要になります。

質問 高校では行列という単語は何回も聞いたことがありましたが、今日初めて少し理解できました!!

— それは良かったです。

質問 初めて行列にふれましたが、たくさん練習してなれていこうと思います。

— まずは行列とはどのようなものかというイメージを掴むことが大事です。

質問 講義をうけて、とても面白そうな数学分野だと感じました。

— そう言っていただけると嬉しいです。行列は数学のどこにでも出てくるのでとても面白いです。

質問 行列の積が少し曖昧にしか理解できませんでした。復習しようと思います

— 第3回で行列の積が由来を紹介する予定なので、それと合わせて理解するのが良いと思います。

質問 これからがんばります

— はい、頑張ってください。

質問 正行列でなくても  $(1, 1)$  成分や  $(2, 2)$  成分のことは対角行列とよぶのですか?  
例)  $2 \times 3$  行列

— 質問ありがとうございます、講義でいい忘れていました。対角行列は正行列にしか定義されません。

質問  $A = a_{ij}$  のとき、 $i, j$  の範囲とかは明記しなくてもいいんですか? 後  $x$  や  $p$  などの見にくかったです。

— 質問ありがとうございます。必要なときは、例えば  $A = (a_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}}$  や正行列ならば  $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$  といった表記をすることもあります。一方で、 $(i, j)$  成分に  $a_{ij}$  があるという意味で  $A = (a_{ij})_{ij}$  と書くこともあり、紛らわしいので、講義では敢えて触れませんでした。太字が見にくいとのこと、気をつけてはいるのですが、見えにくいようでしたら講義中に教えてください。

質問 計算の仕方に慣れてないからややこしかった。

— 計算は慣れしかないなので、演習頑張ってください。

質問 説明が速すぎて追いつくのにかいしばいで理解が不十分だった

— 今後も今回の進行速度と同じくらいになると思うので、頑張ってください。

ださい。

質問 積のやり方についての講義が楽しみです。

— 乞うご期待です。

質問 先生は何歳ですか?自分は 27 だと思ひます

— 惜しいです。先月 (3 月) に 29 になりました。

質問 行列がどのようなものか分かりました。授業分かりやすかったです。

— そう言っただけだと嬉しいです。

質問 今日の分はちゃんと理解することができました。ありがとうございました。これからよろしくお願ひします。

— そう言っただけだと嬉しいです。こちらこそよろしくおねがひします。

質問 よろしくおねがひします。

— こちらこそよろしくお願ひします。

質問 しっかり演習して行列の計算になれないといけないなと思ひました。

— 慣れるには演習しかありません。頑張ってください。

質問 たくさん演習して計算に慣れたいと思ふ

— 頑張ってください。

質問 やる気がみなぎっているので頑張ります。

— 頑張ってください。ただ、最初に飛ばし過ぎると後半バテちゃうのでペース配分を大事にしてください。

質問  $(AB)C = A(BC)$  と  $AE = A$  が不思議。

— どちらも総和記号  $\sum$  の良い演習問題です。証明してみましょう。

質問 ややこしかったです。演習頑張ります。

— 頑張ってください。

質問 これから 1 年間よろしくお願ひします

— こちらこそよろしくお願ひします。

質問 行列を考える理由を説明していただいたのがすごく分かりやすかったです。

— そう言っただけだと嬉しいです。

質問 慣れればなんとかなりそうですが。。

— そのはずですので、頑張って慣れてください。

質問 虚数は入らないのですか?なぜ実数しか入れることができないのか。

— もちろん複素数が入っても構いません。実はもっと一般のものが入ったりします。この講義では、大学が始まったばかりなので、慣れている実数を中心に使っています。

質問 わかれば、とても楽しいです!!後半はあまりわからなかったなので、復習してきます。

— そう言っただけだと幸いです。

質問 少し早かったです。

— 今後も今回の進行速度と同じくらいになると思うので、頑張ってください。

質問 面白そうです。

— 行列が関わってくる面白い話はたくさんありますので、気になったら調べてみましょう。

質問 具体例がほぼ無いため、理解しにくい

— なるべく入れていきたいとは思っていますが、なかなか難しいです。自分で具体例を作る、ということも重要です。

質問 講師の自己紹介をしていただきたい。

— 忘れていました。10 年くらいここ九州大学でお世話になっている数学の一研究員です。

質問 理解できた。もっと演習を重ねたい!

— そう言っていただけると嬉しいです。講義は最低限の話題しか扱えませんので、演習問題等を通して行列とはどのようなもののかのイメージを掴んでもらえたいと思います。

質問 難しいです

— 新しい概念は最初に見るときは難しく見えますが、やっていることは実は単純だったということはよくあります。演習問題などを活用して、まずは行列とはどのようなものかというイメージを掴んでいけばいいかと思います

質問 小テスト助かります。

— それは良かったです。なるべく小テストの時間は毎回 10 分程度は確保したいと思っています。

質問 はやい

— 今後も今回の進行速度と同じくらいになると思うので、頑張ってください。

質問 難しかったけど、理解でき、面白かった。

— そう言っていただけると嬉しいです。行列が関わってくる面白い話はたくさんありますので、気になったら調べてみましょう。

質問 かけ算の練習をしておきたい。

— 頑張ってください。

質問 行列を習っていなかったのが大変だった。

— 慣れるまでが大変ですが、頑張ってください。

質問 行列難しい

— 新しい概念は最初に見るときは難しく見えますが、やっていることは実は単純だったということはよくあります。演習問題などを活用して、まずは行列とは

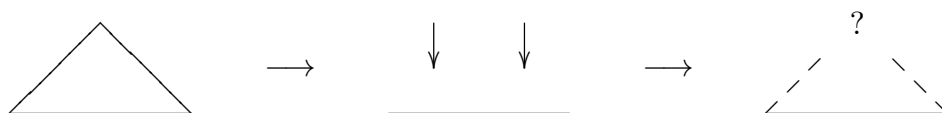
どのようなものかというイメージを掴んでいけばいいかと思います

質問 慣れない計算だったけど、来週までには習得してきます!

— 慣れるまでが大変ですが、頑張ってください。

質問  $\det$  は  $2 \times 2$  のときしか定義されないのですか?  $\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$  のときの  $\det$  は...?

— 良い質問をありがとうございます。行列式  $\det$  は一般に正方行列に対して定義されますが、例として挙げていただいたような長方形の行列に対しては定義できません。行列式は、講義で少しだけ言いましたが、逆行列が存在するかどうかの判定で重要な役割を果たします。しかし、長方形はそもそも逆行列が定義できません。これは、たとえば三角形を一度潰した後で、もう一度元の状態に戻そうとしても元には戻せないことを考えたらなんとなくイメージは掴めるかと思います。

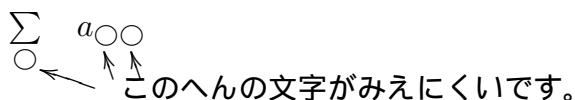


ただし、長方形行列にも逆行列の類似物はあるようです。

質問 教科書に記術されている基礎事項は配布資料を用いて説明してもいいと思いました。数学好きです。お世話になります。

— 確かに用語の定義などではそちらのほうが良いかもしれませんね。参考にさせていただきます。大学の数学は高校までものよりも難しいですが、その分面白いことも多いです。ちなみに記述です。楽しみにしててください。こちらこそよろしくおねがいします。

質問



— 失礼しました。気をつけてはいたのですが...読めないようでしたら、講義中に教えてください。

質問 進行が想像以上にはやかった。しっかり復習時演習して慣れたい。

— 今後も今回の進行速度と同じくらいになると思うので、頑張ってください。

質問 とても良かった。

— そう言っていただけると嬉しいです。

質問 予習しないとついていけないだろうなあと感じました。

— 今後も今回の進行速度と同じくらいになると思います。頑張ってください。

# 線形代数学・同演習 A

4月19日分 質問への回答

質問 過程がわかりやすかった．

— それはよかったです．

質問 授業中にもっと演習がしたいです．

— 本当は演習時間も作りたいのですが，なかなか難しいです．

質問 高校までとは違った視点でみるベクトルは新鮮でおもしろかった．

— 思いもよらない繋がりなどが有ったりする所が数学の魅力です．

質問 わかりやすかったです．

— それはよかった．

質問 板書の文字をネットにあがっているノートと合わせてほしい。

— 失礼しました．板書を容易する段階で少し内容を変更したので...

質問 パラメータ表示を標準型にはできるけどその逆はできないということですよね？

— 違います．ただ，問題として作りにくいので例題にはなりませんでした．

質問 パラメータ表示は媒介変数表示とも言いますよね、あと、外積についてもっと（詳しく）学ばせていただきます

— そうですね．外積は2本のベクトルと直交する方向を与える重要な演算ですが，講義中では扱えません．次回の演習問題でいくつか問題を用意していますので，そこでイメージを掴んでいただけたら．

質問 外積よくわからない

— 講義では定義だけの紹介だったので無理ありません．イメージとしては，与えられた2本のベクトルどちらともと直交するベクトルを求める（例えば  $x$  軸方向と  $y$  軸方向だったら，計算結果は  $z$  軸方向になる）ということです．

質問 今日の内容は高校の内容と被るところもあったので分かった。

— それはよかったです．

質問 今日もまだなんとかついていけた。平面の方程式はやったことがあったけど、もっとわかりやすくなった。

— 少しずつ難しくなっていきます．がんばってついてきてください．

質問 早かったけど、がんばってノートをとった。

— それはよかったです．ただし，ノートをとるだけで終わらないように．

質問 なんとかついていけた...

— それはよかったです．

質問 なんとかついていけていると思います。しっかり演習で復習したいです。

— 自分のものにするには演習しかありません．がんばりましょう．

質問 もっと演習を重ねようと思う。

— がんばってください。

質問 線形の意味がわかってよかった。演習プリントが授業と対応してなくてツライ

— それはよかったです。あれもこれもと演習問題を用意するとどうしても...もう少し工夫してみます。

質問 換気して下さい。

— 講義していると気が付かないので、気になったら講義中でも良いので指摘してください。

質問 授業中教室が暑くて眠くなるので、適宜換気等をお願いします。

— 講義していると気が付かないので、気になったら講義中でも良いので指摘してください。

質問 パラメータ表示から標準型に直す練習をしていきたい。

— がんばりましょう。

質問 今日はよく分かりました。

— それはよかったです。

質問 面白い。

— 行列は面白い話題が多いので、興味があったら色々探してみましょう。

質問 楽しいっす!!

— そう思ってくださいと講義のしがいがあります。

質問 はやい。

— これが標準です。がんばってついてきてください。

質問 書く量が多く大変でした。しかしこれになれていこうと思いました。

— これからも毎回このくらいの量かと思います。

質問 面白い。

— 行列は面白い話題が多いので、興味があったら色々探してみましょう。

質問 分かりやすかった。

— それはよかったです。

質問 エアコンを入れてほしい。

— 講義していると気が付かないので、講義前に入れるようにしてもいいかもしれませんね。

質問 とてもわかりやすいです。

— それはよかったです、ありがとうございます。

質問 分かりやすかったです。

— それはよかったです。

質問 逆

— えーと...?

質問 平面の幾何の直線の方程式 ① で  $\begin{cases} y = ax + b \\ \text{又は} \\ x = x \end{cases} \rightarrow \text{まとめて } ax + by = c \text{ の}$

ところで、何をどうまとめたのかがよく分かりませんでした。

— 質問ありがとうございます,そこは説明不足でした。高校までだと直線の方程式は  $y = ax + b$  という形で教わっていた(と思う)けれど,それだと  $y$  軸に平行な直線 ( $x = c$ ) は場合を分けて書く必要がある。そこで,  $ax + by = c$  というものを考えると,  $(a, b) = (1, 0)$  とすればこれは  $x = c$  になるし,  $(a, b, c) = (-a', 1, b')$  とすればこれは  $y = a'x + b'$  の形になる。だからこれを直線の方程式にすれば場合分けの必要がなくなる,ということです。



# 線形代数学・同演習 A

4月26日分 質問への回答

質問 しっかり復習します

— 頑張ってください。

質問 固有値の計算方法で  $\det$  が出てくるところのやり方が分かりません。

— 初回の講義で少しだけ説明しただけですので、無理ありません。2次正方行列の場合は  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$  です。

質問 エアコンを入れてほしい。その日にいくつかのことをするのか等

— 次回は入れてみます。次から試してみます。

質問 質問に答えて下さってありがとうございました。

— こちらこそ、質問していただきありがとうございました。

質問 固有値の求め方で  $\det(tE - A) = 0$  の  $\underline{tE - A}$  がどうしても分からなかった。

— 本当は説明したかったのですが、説明出来るだけの道具がまだ揃っていません。もうしばらくお待ちください。

質問 できるが、使い道がわかんない。

— 行列は図形を変形させる事ができる、ということを実感してもらうのが目的です。CG(コンピュータ・グラフィックス)でも、内部ではこのような行列演算が行われているようです。

質問 写像がよくわかりません

— 関数を少し一般化したものです。

質問 今日はなんとか乗り越えた

— それは良かったです。

質問 なんとなく理解できた

— それは良かったです。はじめから全部を理解するのは大変なので、少しずつ理解してもらえればと思います。

質問 ベクトルは方向を表しているなどあるが行列は何を表しているのかがわからない。図形を変える働きがあると考えればよいのか？

— その理解で大丈夫です。

質問 しっかり復習して力をつけたいです

— 頑張ってください。

質問 「写像」というのはいままででいう「関数」??

— だいたいその理解で大丈夫です。

質問 

— これを TeX(普段利用している組版処理システム)で描画するのは、大変なんです。

質問 なぜ回転行列だけ  $P(\theta)$  で他は  $A$  なのか

— 回転行列はよく出てくる行列であること、そして後の講義で例として出す可能性が高いこと、が主な理由です。

質問 回転行列・逆行列は覚えるべきですか？

— 覚えるべきです。

質問 線形写像とは行列をかけ算することの図形的意味ということですか？また、反転、回転などの操作をするときどんな行列をかけたらいいかは暗記ですか？

— 正確には“行列をベクトルに掛けることの”ですが、そうです。線形写像の例として反転・回転があるということを知って欲しかったので、暗記する必要はありません。が、回転行列は覚えていて欲しいところです。

質問 演習の答えをはやめにほしいです。

— まず自力で考えることが大事だと思うので、少し時間を空けています。

質問  $\det$  がよくわかりませんでした。

— 行列式、です。講義では初回の最後に少しだけしか出てきていないので無理もありません。後でまた詳しく説明をします。

質問 **楽勝すぎと～！！**

— 本当ですか？

質問  $\det \begin{pmatrix} t & -1 \\ -1 & t \end{pmatrix} = t^2 - (-1)^2 = 0$  となるところがわかりませんでした。

— 講義では初回の最後に少しだけ出てきたので、そこを見てください。行列式は後でまた詳しく説明をします。

質問 “ $\det$ ” って何ですか。

— 行列式、です。講義では初回の最後に少しだけしか出てきていないので無理もありません。後でまた詳しく説明をします。

質問 固有値の求め方  $\det(tE - A) = 0$  の  $E$  は何ですか。

— 単位行列です。サイズは (当然ですが) 行列  $A$  と同じものをとります。

質問 まだ行列の理解がおいつけてない気がする、けっこう分からない

— “連立一次方程式を解くための有効なツールである”ということと、“線形写像の研究から生まれた”と理解しておいてください。後は講義を通して少しずつわかってくると思います。

質問  $\det$  ってなんですか？線形写像って何ですか。

—  $\det$  は行列式です。後でまた詳しく説明をします。線形写像は、写像の中でも特に基本的なものです。例えば微分とか積分も線形写像の範疇に入っています。

質問 最後の固有値の計算がよくわかりませんでした。

— 2次正方行列の場合は  $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$  なので、これを使います。

質問 好きな女性のタイプを教えてください

— ノーコメントです。

質問 先生、何歳ですか？（予想 28）

— 前々回あたりの Q&A ですでに答えています .

# 線形代数学・同演習 A

4 月 19 日分 質問への回答

質問 時間が足りません!

— 各問 4,5 分くらいでできるようになるまで、演習を頑張りましょう。行基本変形はこの講義においてはとても大事です。

質問 今のところ、普通に連立方程式を解いた方が速そうです。

— 確かにそうかもしれませんが、しかし、行列で書いておくと後々便利なのです。例えば、応用になると数千、数万の変数・方程式からなるような連立一次方程式を解く必要があるそうです。そうすると手では解けないので、コンピュータを利用することになるわけですが、そのとき行列で書いておくと便利なのです。

質問 毎回感動させられます。ところで… 単位ください

— 本当ですか? 昔とある教授に同じことをお願いしたら、こう言われました。

落としたくて落としているんじゃない。みんなが勝手に落としていくんだ。

みなさん、がんばりましょう。

質問 がんばります

— がんばってください。

質問 甘酢っぱい話をしてください!

— 甘“酢”っぱい話とは。

質問 何とかできたのでよかった

— それは良かったです。

質問 恋バナしてください!!

— いやです。

質問 逆行列の求め方をしりたい

— 講義の後半で紹介したと思うのですが…。

質問 先生の授業って録画可ですか? ネットや SNS に上げないことを条件に

— あまりしてほしくはないです。ただ、していても気が付かないような気がします。

質問 プリントの演習って授業だけでとけるのか

— 基本的には解けるはずですが、解き方がわからないということがあれば、講義後あるいはメールで質問してください。

質問 前回の宿題がぜんぜんわからなかったので中間テストが心配です。

— 前回 (4 月 26 日分) の演習問題はとっつきにくい問題が多かったですね。まずは連立一次方程式を解けるようになることが大事だと思います。がんばってください。

質問 基本変形を最短で答えまでいける人、凄い。(居たら)

この (1) と (2) は最短何回の基本変形が必要ですか?

- 最低にこだわるよりも、間違いなく解答までたどりつけることのほうが大事です。ちなみに、最低かどうかは分かりませんが、自分で解いた際には (1) は 4 回、(2) は 6 回の基本変形で答えに到達しました。

質問 演習問題の解説をもう少し詳細にして欲しいです。

- 講義の後に質問に来てください。

質問 質問がいくつかあるので先にまとめておきました。

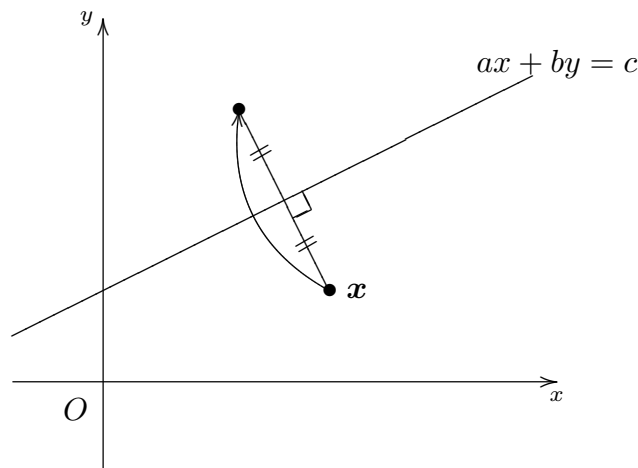
1. 4/19 分の演習問題 6 の (2) で  $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-s-t \\ 1-t \\ t \end{pmatrix}$  から  $y+z=1$  という式は出のですが このとき  $x$  の値はどのような関係になるのですか。
2. 4/19 分の演習問題 11 の計算方法が分かりません。教えてください。
3. 鏡映写像について  $(x, y) \mapsto (x, -y)$  ということは  $y$  のふ号を  $+$ ,  $-$  逆にすればいいだけということですか?

4. 鏡映写像について

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} ? \\ ? \\ ? \end{pmatrix} \quad ? \text{のところはどうなりますか?}$$

- 質問ありがとうございます。ひとつずつ回答していきます。

1.  $s$  を動かせば、 $t$  の値に依らずに  $x$  は任意の値を取ることができます。だから、どういう関係になるかと聞かれたら、なんでも良いということになります。
2. 直線の交点を求める際に直線を与える方程式を連立させて解くように、二つの平面を与える式を連立一次方程式と見て、それを解いているわけです。一般の連立一次方程式は次回解説しますので、それも参考にしてください。因みに、(1) は解答が少し間違っているようですので、後で訂正します。
3. 鏡映写像は、直線 (あるいは平面) に付随して決まる写像です。例として挙げたのは、その直線として  $y=0$  を取れば、 $(x, y) \mapsto (x, -y)$  になる、ということです。下図を参考にしてください。



考え方としては、鏡映写像で移る先は点  $x$  から基準となる直線に向かって

最短の方向に進み，点  $x$  から直線までの距離と同じだけ直線から進んだ所です．それを数式を使って表現して，整理すればよいわけです．

4. 考え方は直線の鏡映写像と同じです．与えられた平面によって変わりますが，すでにネットに上げた解答の下の方注に，一般の公式を書いています．

質問 分かりません．

— 演習問題などを利用して分かるようになってください．

質問 久しぶりでしたね

— そうですね．ゴールデンウィークがあったので．

# 線形代数学・同演習 A

5月17日分 質問への回答

質問 計算ミスは命取りですね。

- ひとつひとつの計算は簡単ですが、その分ケアレスミスが多くなる可能性がありますので、気をつけてください。

質問 これは簡約な行列ですか？

$$\begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array}$$

- 簡約な行列ですが、線の引き方がなにかおかしいです。

$$\left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{array} \right)$$

質問 全然とけなかった

- 簡約化は今後の講義で基本となるものですので、しっかりと復習をしてください。

質問 難しかったです、

- 教科書や配布した演習問題で復習をしましょう。

質問 分かりません。がんばりたいです。

- がんばってください。

質問 掃き出すときに1がないときはどうしたらいいですか。

- 一番簡単なのは、0でない主成分がある行を主成分で割ることで、整数行列だと、うまく基本変形をすると1を作れる事があります。たとえば、

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

質問 今日のテストは時間に間に合ったのでよかったです。

- それはよかったです。

質問 「解なし」なんてビックリさせないでよ～

小テで満点とれなくても総合成績で満点はとれますか？

- そんなに驚かれるとは思いませんでした。中間期末が満点ならきっと大丈夫です。

質問 大学生のころの話を聞かせてください。

- 気が付いたら終わっていました。

質問 テストかんたんにしてください。m(\_ \_)m

- テストかんたんだったと言えるくらい勉強しましょう。

質問 みんなに拍手されているときの先生が、とってもかわいかったです！

先生大好き

— あの拍手は未だに理由がわかっていません。

質問 もっと小テストの時間が欲しい。

— 本当はもう少し時間をとるつもりでしたが、出来ませんでした。すみません。

質問 けいさんミスしてしにたいです。

— いきてください。

質問 平面のパラメータ表示が一意的でないとはどういうことですか？

— 例えば，平面  $x + y + z = 1$  をパラメータ表示しようとしします． $y, z$  をパラメータと思えば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となりますが，他にも

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s' \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + t' \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

というようにパラメータ表示することも出来ます．このように，一見見た目が違っても同じ平面を表すことができる，ということが一意的ではないということになります．

質問 母校の数学の先生が、先生とかなり声似てて、時々笑ってます。あと字

— そうなんですか，ちょっと気になります．



# 線形代数学・同演習 A

5 月 24 日分 質問への回答

質問 中間テストは演習問題の内容は出ますか。

— はい。ただし、\* 印が付いている問題は出しません。

質問 がんばります。

— がんばってください。

質問 中間テストは、演習問題の証明問題レベルの問題はでますか、

— \* 印がついたもの以外は出る可能性はないとは言いませんが、演習問題にそこまで難しい証明問題は出してないと思います。

質問 演習問題の数値をきれいにしてください。合ってるかの検算がやりにくいです。

— 確かに演習問題としては、解の数値が大きいものもありましたね。失礼しました。

質問 独学でジョルダン細胞とかまで理解するとしたら厳しいものですか？

— 質問ありがとうございます。そこまで厳しくはないと思いますが、いきなり理解しようとするのは難しいかと思います。教科書に指定している三宅敏恒著「入門線形代数」ではジョルダン標準形の話は出てきませんが、まずはこの教科書にも載っている(対称)行列の対角化を理解することを目指するのが良いと思います。それから先は、例えば金子晃著「線形代数講義」などいろいろあると思います。独力でやって、わからない点があったら遠慮なく質問してください。

質問 もうすぐ中間テストなので、演習の答えを早めにだしてほしいです。好きな食べ物は何ですか？(ちなみにぼくは先生が大好きです！)

— 演習の解答は、今週分も含めて用意しています。ちなみに、あまりにふざけた質問をしている人は採点を厳しくしている、と採点を任せている TA が言っていました。がんばってください。

質問 I 原と同じ\*<sup>1</sup>

— 上と同じ

---

\*<sup>1</sup> 個人名が入っていたので、一部を伏せました。

# 線形代数学・同演習 A

5月31日分 質問への回答

質問 今、教科書のどこをやっているか分からないから、教科書にあるならどこか教えてほしい

— 全てではありませんが、教科書の第1章を探せばいくつか見つかります。5月31日の講義は、今まで放置していて、後で使うものを紹介するというものでした。それに加えて、総和記号の使い方の復習を合わせて行ったわけです。これは、申し訳ないのですが、教科書には記述はされていません。

質問 中間頑張ります！

— 頑張ってください！

質問 対角成分と対角成分より上にある成分の中に0があるときでも上三角行列になりますか？

$$\begin{pmatrix} \circ & \circ & \circ & \circ \\ 0 & \circ & \circ & \circ \\ 0 & 0 & \circ & \circ \\ 0 & 0 & 0 & \circ \end{pmatrix} \quad \text{例えば} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{は上三角行列ですか？}$$

— なります。元々の定義は、“対角成分よりも下にある成分がすべて0”ですので、対角成分よりも上にある成分については何も条件がありません。大げさな話、零行列や対角行列も上三角行列（と同時に下三角行列）です。

質問 ① 内積の定義って何ですか？

- 4次元以上だと角度が定義できるかわからないから  $\|x\| \|y\| \cos \theta$  は変
- $x$  を  $1 \times n$  型、 $y$  を  $n \times 1$  型とすると  $(x|y)$  の定義はできるが、 $x+y$  が定義できないから変。

②  $x$  と  $y$  が同じ次元なら  $(x|y)$  はわかるけど、 $Ax$  が  $y$  と同じ次元とは限らないから  $(Ax|y)$  は簡単には定義できないのではないですか？

— 良い質問をありがとうございます。指摘の通り、内積は同じ次元のときに限って定義され、それは  $(x|y) = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$  ( $x, y \in \mathbb{R}^n$ ) で与えられます。ですので、講義の証明においては、 $A$  は正方行列であると仮定しておくべきでした。因みに、 $k$  次元の数ベクトル空間  $\mathbb{R}^k$  の内積を  $(\cdot|\cdot)_k$  と書くことにすれば、 $m \times n$  行列  $A$  に対して、

$$(Ax|y)_m = (x|^t A y)_n \quad (x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^m)$$

が成り立ちます（証明は講義のものと全く同様）。

質問 なんちゃ中間テストは、そーとがんばるばい!!

— なんちゃ...?

質問 ちばりよります。

— ちばり...?

質問 テスト てげ頑張ります。

— 頑張ってください。

質問 ブラックモンブラン派ですか、ミルクック派ですか、トラキチ君派ですか。

— ブラックモンブラン以外あまり食べませんね。因みに、モンブランはフランスの山 Mont Blanc のことで、“白い山” という意味です。つまり、ブラックモンブランとは...

質問 書き終わった黒板は上にしてくれると助かります。

— 次回から気をつけようと思います。

質問 しょーみテスト頑張んで! (大阪 ver.)

— 正味って言葉、こちらではあまり使いませんね。

質問 テストぶちがんばるけえの～。

— 広島?

質問 しょーみ，満点とります!!

ところで 
$$\left( \begin{array}{c|cc} a & b & c \\ \hline d & e & f \\ \hline g & h & i \end{array} \right)$$
 こんな分割はなしですね?

— 計算ミスに注意です。

積をうまく扱えないので，そういった形に分割することは滅多にないと思います。少なくとも，そのような分割で何かしらの意味のあるものは，今まで見たことはありません。

質問 4/19・演習問題の8番の解説でなぜ  $a \cdot d_{\frac{a}{\|a\|}} = 1$  となるのかが分からない。

— 平面の方程式  $ax + by + cz = 1$  を，内積を使って書けば  $(a|x) = 1 \cdots \textcircled{1}$  となることを利用しています。今，点  $d_{\frac{a}{\|a\|}}$  がその平面上にあるので， $\textcircled{1}$  の  $x$  にこのベクトルを代入すれば，その式が得られます。4月26日分演習問題の4番についての簡単な補足も参考になるかと思います。

# 線形代数学・同演習 A

6月14日分 質問への回答

質問  $n$  次の正方行列  $A$  の行列式  $\det A$  を平行  $2n$  面体の体積で定義するのは変ではありませんか?そもそも  $n$  次元空間のよくわからない物体の体積というのが気持ち悪いです.

— 良い質問ですね. 実際, 講義でした定義は不十分な点 (符号の決め方が曖昧) もあります. 行列式の定義の方法はいくつかあるので, それを幾つか紹介したいと思います.

① 置換群  $S_n$  を利用した定義:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}.$$

② 特定の条件を満たす関数  $\det: M(n, \mathbb{R}) \cong (\mathbb{R}^n)^n \rightarrow \mathbb{R}$  としての定義:

- (i)  $\det(e_1, \dots, e_n) = 1$ ,
- (ii)  $\det$  は各列に関して線形性をもつ,
- (iii)  $\det(a_1, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_n) = -\det(a_1, \dots, a_j, \dots, a_i, \dots, a_n)$ .

ここで,  $M(n, \mathbb{R})$  は  $n$  次正方行列で,  $M(n, \mathbb{R}) \cong (R^n)^n$  は, 行列を列ベクトルの集まりとみなす同一視. また, (iii) は  $i$  列目と  $j$  列目を入れ替えたら符号が変わる, ということを言っている.

③ 講義で紹介した方法 (行列を構成する列ベクトルを一辺とする平行  $2n$  面体の体積としての定義), 符号は ‘適切に’ 定義する.

おそらく, ①が普通の定義だと思います. ですので, 講義での定義が気持ち悪いということであれば, この①を定義として, 講義の定義は行列式の性質として読み替えてください. 講義において, ①の定義を避けた理由は, その定義のために置換群  $S_n$  を導入する必要があるためです. 置換群自体はそこまで難しいものではないのですが, 新しい概念を使って定義するよりも, 低次元からの類推で直感的な定義をしてから, 公式として①を紹介するほうがわかりやすいと考えました. 因みに, 私としては, ②の定義が一番わかりやすいと思っています.

なお,  $n$  次元空間の領域の体積は, 微分積分学の後期で学ぶことになります.

質問 線形はどこでつかうんですか?

— 例えば, 球面のような曲がった領域を考えると, 直接曲がった領域を扱うことは難しいので, “接平面” を考える事が多くあります. 接平面は, まっすぐな空間なので, 線形代数の理論を適応することが出来ます. そして, そこから元の曲面の情報を導出する事ができるというわけです. 他にも, 連続な関数全体のなす空間が “ベクトル空間” になるので, 関数について調べるときに, 線形代

数の理論を用いることが出来ます．例えば，微分・積分をするという写像は線形写像です．

質問 この世は点数という表面的なものにより，その人の性格あるいはその人自身を決定してしまうという傾向にあります。自分は，そのことはおかしいと思います。自分は点数だけでは見えてこないそのことを個性といったものを重視すべきだと思います．なので，今回は平均点行かなかった自分をおおめ大目に見てください．お願いします．

— その意見には同意しますが，残念ながら基幹教育は点数が全てです．期末試験で挽回してください．

質問 中間テストと小テストの成績のウェイト比を教えてください。

— だいたい半分くらいだと思います。

質問 中間テストの成績に入れる割合を教えてくださいませんか。また期末テストの範囲は中間以降の内容ですか。それとも全範囲ですか。

— 多分、だいたい半分くらいです。期末は、中間試験に範囲の問題も出題する予定です。

質問 ボールを相手のゴールにシュウウウー!!

— えーと...？

質問 レポート頑張りたいと思います！

— はい。

質問 中間テストも6割でC評価ですか？

— 期末次第です。

質問 中間テストの答えはサイトにでますか？

— 出さない予定です．

質問 演習問題の解答をもっとくわしくしてほしい．

— これ以上詳しくはしないつもりですので、わからないときは直接聞きに来てください。

質問 演習問題の解答で定義に従ってとか書かれてもわからないのでちゃんと解答作ってください

— それはちゃんと定義を理解していないからでは？ わからないと思ったらまず定義やその問題に出てくる記号について確認するようにしましょう．

質問 3次のサラスの方法が今まで以上に簡単にできました．

— それは良かったです．

質問 期末テストは簡単にしてください(^\_^;)

— そう言われると、難易度を上げたくなくなります。

質問 わかりやすかった

— そう言っていただけると嬉しいです．

質問 黒板上にしてくれてありがとうございます。助かります。

— 今後も書き終わった黒板を上にするようにしますが、忘れていたら指摘してください。

質問 うえ～い<sup>\*2</sup>

— ？

サラスの公式が出てきたので、これに関する話を少し．3 次行列の全展開式

$$\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_1 b_3 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3$$

は、日本では、よく“サラスの公式”と呼ばれている．この‘サラス’というのはフランス人数学者 Sarrus という人物で、フランス人の名前なので‘サリュール’と読むのが正しい．さらに、この Sarrus がこの全展開式を発見したという確固とした証拠は見つかっておらず、しかも、この全展開式を世界で初めて発見した人は、実は和算家・関孝和である．なので、この公式を「サラスの公式」と呼ぶべきではない、という人もいるようです．<sup>\*3</sup>

以下の小論文に詳しく書いてあります．興味のある人は読んでみてください．

関-Sarrus の公式をめぐって —Sarrus は本当にこれを得たか?—

(阿部剛久，藤野清次; 数理解析研究所講究録 1195 (2001), 38–50)

(<http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~kyodo/kokyuroku/contents/pdf/1195-4.pdf>)

---

<sup>\*2</sup> 絵文字がありましたが、TeX では入力できず

<sup>\*3</sup> もちろん、答案で‘サラスの公式より’と書いて減点、ということはありません．

# 線形代数学・同演習 A

6月21日分 質問への回答

質問 最後の  $S_2 = \{\varepsilon, (12)\}$  と  $S_3 = \{\varepsilon, (12), (23), (31), (123), (132)\}$  がどうしたらこれになるのかわかりません

— 置換群は、要するに文字の並び替えのことなので、1, 2, 3 の並び替えを虱潰しで見つけていけばいいわけです。

1	2	$\sigma$	1	2	3	$\sigma$
1	2	$\varepsilon$	1	2	3	$\varepsilon$
2	1	$(12)$	1	3	2	$(23)$
			2	1	3	$(12)$
			2	3	1	$(123)$
			3	1	2	$(132)$
			3	2	1	$(31)$

質問 任意のちかんは五感の積として表せるとはどういうことですか？

— 五感の積とは。

質問 好きな顔文字は何ですか？

— (´ ; ; `) とか (´ · · `) とかをよく使っていた気がします。

質問 ・中間テストにでたやつですが  $(Ax|y) = {}^t(Ax)y$  がどういうことかわかりません。

・なんで今日はかけ算をしるまるでかいたんですか。

— ・わからないときは、定義に戻って考えるようにする習慣をつけてください。

内積の“定義”は  $(x|y) = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$  で、次のベクトルの積  ${}^txy$  は

$${}^txy = (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

なので、 $(x|y) = {}^txy$  です。ここで、 $x \mapsto Ax$  とすればよいわけです。

・置換というものの積だということがすぐ分かるように、です。

質問 今日学んだことが後々どう役に立つのか全くわかりません (笑)

— 単位を取得するのに役立ちます。という冗談は置いておいて、この置換の性質を使って、行列式の重要な性質を導くことができます。

質問 今教科書の何ページをやっていますか。

— この日の講義は pp.38-41 あたりの話題を扱いました。

質問 質問の回答の内容がよくわかりました。ありがとうございます。

— こちらこそ、いつも質問をしていただき、ありがとうございます。

質問  $\text{sgn}(\sigma)$  がいまいちわかりません

- 文字を並び替えるのに必要となる互換の数の、偶奇を教えてください。別の言い方をすると、あみだくじで  $1, 2, \dots, n$  がそれぞれ  $\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)$  になったとする<sup>\*4</sup>と、 $\text{sgn}(\sigma)$  は横線の本数の偶奇と対応しています。

質問 超!エキサイティング!

- ?

質問 你的女朋真漂亮!!

- 読めません。あと、中国語を TeX で出力するのは大変なんです。

質問 演習

- えーと?

---

<sup>\*4</sup> ただし、あみだくじの上下の数字は、共に  $1, 2, \dots, n$  と並んでいるとします。



# 線形代数学・同演習 A

6月28日分 質問への回答

質問 板書： $i = \sigma(k)$  より  $\sigma^{-1}(k) = i$  はミスですか？

正)  $i = \sigma(k)$   $\sigma^{-1}(i) = k$  と思われます．

- たしかにそれはおかしいですね．その訂正が正しいです．  
指摘ありがとうございます．

質問  $\sigma$  がうまくかけなくて6になってしまいます． $\sigma$  の上手なかきかたを教えてください．

- ネットで調べてみて初めて知ったのですが、「丸の右側から書き初めて、右に棒を伸ばす」そうです．今まで逆で書いていました．少しでてる棒を右に行くように書けばそれっぽくなる気がします．

質問 ツクダオリジナルから！！

- オセロ？ (調べた)

質問  $\tilde{a}_{i\sigma(i)}$   $i \leftarrow$  これなんですか

- 質問ありがとうございます．それは、行列の  $i$  列目であることを明示するための記号です．

質問 ぼくコッシー

- 少し遅い自己紹介ですね．よろしくお願いします．

質問 分かりま 10

- 演習問題全問解くまで帰れま 10 とかどうでしょう．

質問 計算が複雑で自身がない

- ひとつひとつの計算自体は簡単ですが、計算量が多いので計算ミスがどうしても多くなります．それを少しでも減らすために、
  - ・丁寧に書く
  - ・一回の式変形で多くのことをしすぎない(例えば、他の行を掃き出すと同時に他の行や列から定数を取り出す、など)といったことを心懸けるとよいかと思います．

質問 4次は難しいです。

- 慣れれば4次はなんとかなるようになります．演習頑張ってください．

質問 감사합니다

- 読めません．ありがとう？

あと、TeX でハングル文字出すの大変なんです (諦めて画像を挿入しています) ．

質問  $a_{1(\sigma)}$  の意味がわからない

- それは私にも分かりません．多分  $a_{1\sigma(1)}$  だと思いますが、 $\sigma(1)$  は置換  $\sigma$  で1がうつった先の数で、それが例えば2だったら、 $a_{1\sigma(1)}$  は  $a_{12}$  のことを表すこ

とになります．一般のものは使うときには，どうしてもこの置換を用いた表現が必要になってきてしまいます．

質問 今日先生少しいつもとちがいましたね (笑) お疲れですか？

— そうでしょうか，いつも通りのつもりでしたが...

質問 授業を受けてすぐ問題を解くのは無理があるのでその辺考りよしてほしい．

— 講義と演習の時間が分かれていればそれも可能ですが，今の講義形態では少し難しいです．

質問 あきらめました。

— もう少し頑張りましょう．

# 線形代数学・同演習 A

7月5日分 質問への回答

質問 授業進度が速すぎて全く理解がおいつきませんでした。難しいところはくり返しおっしゃっていただくとありがたいです。

— すこし内容を詰め過ぎました。定理の内容と、余因子展開の方法を抑えておいってください。難しいところはくり返し説明すること、心掛けてみます。

質問 今日の授業は  $i$  と 1 が見分けにくかったです。

— それは申し訳ありませんでした。どうも  $i$  の書き方が定まらなくて。

質問 好きな模様 (柄) は何ですか？

— フラクタル図形とか綺麗ですね。

質問  $\begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$  の行列はどこからでてきたのですか。

— どこから来たのか、といわれると困りますが、発想としては

$$\begin{pmatrix} A & O \\ X & B \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{列基本変形}} \begin{pmatrix} A & AB \\ X & B + XB \end{pmatrix}$$

となるので、ここで  $X = -E_n$  とすれば右下のブロックが零行列になるから都合がいろいろ、ということだと思います。

質問 6/14 の演習問題で 6 の答えがありません！

あと細かいですが、6/14 の 4 で 2 次関数の判別式って変じゃないですか

— 指摘していただきありがとうございます。気が付きませんでした。早速、解答をあげておきます。

確かに 2 次“関数”の判別式とは言わないみたいですね。2 次方程式、2 次多項式、2 次形式の判別式とは言うようですが。判別式の理論は、対称式も関係してきて勉強したら面白いと思います。私はそこまで詳しい訳ではありませんが...

質問 今日めちゃくちゃ楽しかったね。

— えっ、そうなんですか？

質問 計算まちがいがヤバイ

— 一つ一つの計算は簡単ですが、量が多いので計算ミスがどうしても多くなります。丁寧に書くなどして、すこしでもそれを減らすように心掛けましょう。

# 線形代数学・同演習 A

7月12日分 質問への回答

質問  $\det(a_1, \dots, b, \dots, a_n) = \det(a_1, \dots, \sum_{j=1}^n x_j a_j, \dots, a_n)$   
$$= \sum_{j=1}^n x_j \det(\dots\dots)$$

なんでくり出せるかわからない

- 行列式の性質 (講義で言うところの命題 10.3 と 10.4) を繰り返し使うと総和記号がくり出せることが分かります。

質問 ヒント出すなら全体に対して出してください。

- 訊かれるとつい色々話してしまうんですね。来週以降気を付けます。

質問 … のところはどんな数字が入るんですか。

- 基本的には… の前後にある数字と同じもの、あるいは  $1, 2, \dots, n$  のように (簡単な) 規則に従って並んでいると解釈します。それは斜め  $\cdot$  になっても同様です。

質問 中間の 2 (1) の標準形は  $3x - 4y + 12z = 13$  の形ではないでしょうか。

- 多分そうだと思いますが、何に対してのコメントなのかが分からないので、なんとも言えません。

質問 分かりません。

質問 さっぱり分かりませんでした。

質問 よくわからなかった

質問 何をすればいいか分かりませんでした。

- いきなり  $n$  次のものを計算しようとしても難しいので、まず  $n = 2, 3, 4$  といったサイズが小さいものから計算してみるといいかもしれません。

質問 わかりません。次回いせつきく！

- 全体的にあまりできていない感じでしたので、次回は解説から始めようと思います。

質問 むりぽ  $\backslash (^q^{\wedge}) /$

- 諦めないでくださいね？

質問 点ください…

- 期末では点を取れるように演習問題で復習してください。

質問 三週連続ホームラン打ってしまった。

- おめでとうございます？

質問 今日の演習は鬼

- 今までの小テストの問題に比べると少し難しかったですが、このような問題も解けるようになってほしいところです。

質問 (問) パンはパンでも食べられないパンはなーんだ??

質問 (答) パンツ!

— ええと...?

この日の小テストの問題で，漸化式や帰納法を使わなくても計算できる方法があるので紹介しておきます．

$$L_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad U_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば，

$$L_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \ddots & \vdots \\ & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad U_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので， $A_n = L_n^{-1} + U_n^{-1}$ ．ここで，

$$L_n^{-1} + U_n^{-1} = L_n^{-1}(L_n + U_n)U_n^{-1}$$

と書けること，および  $L_n^{-1}, U_n^{-1}$  はいずれも対角成分が 1 である三角行列であることを踏まえると，行列式の積公式より

$$\det(A_n) = \det(L_n + U_n) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

である．各行の成分の和が等しいので，それを第 1 列に集めると，

$$\begin{vmatrix} n+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n+1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ n+1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix} = (n+1) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

なので， $\det(A_n) = n+1$  がでる．

この方法は，この行列だからうまく行った方法であって，普通は帰納法なり漸化式なり用いるほうがよいです．

因みに，この行列  $A_n$  は “A 型の Cartan 行列” と呼ばれている特別な行列になります．数学の表現論という分野において，非常に重要な行列です．

# 線形代数学・同演習 A

7 月 19 日分 質問への回答

質問 解答の訂正をお願いしたところの訂正がされていないようです。

演習の解答を上げて下さり、ありがとうございます。

— ご指摘くださりありがとうございます。ファイルをアップロードしたまではよかったのですが、肝心の html を変更するところで間違えました。今度こそちゃんと出来ていると思います。

試験勉強の一助になれば幸いです。

質問 gōngtián mèng qì

— 読めません！ここに載せるか少し迷いましたが...

質問 お久し

質問 ブリーフ

— ええと.....？

# 線形代数学・同演習 A

7月26日分 質問への回答

質問 固有ベクトルの求め方がよく分からなかった。

— その辺りの解説が、少し駆け足になってしまいました。行列  $A$  の固有値・固有ベクトルの計算は、

(i) まず  $A$  の固有多項式  $g_A(t)$  を計算する。

(ii) 次に  $g_A(t) = 0$  を解いて、 $A$  の固有値  $\lambda$  を求める。

(iii) そして、各固有値  $\lambda$  に対して、 $(\lambda E_n - A)x = 0$  という斉次の連立一次方程式を解く。

(iv) その解のうち、零ベクトルでないものがちょうど固有ベクトルになっている。

です。質問の回答の後ろに、今日の例題 14.5 の回答の一部を丁寧に書きますので、そちらも参考にしてください。

質問 半年おつかれした \ (^o^ ) /

— みなさんも半年間お疲れ様でした。

質問 前期はお世話になりました。

後期もよろしくお願いします。

— こちらこそ、拙い講義に付き合っていたいただきありがとうございました。後期もよろしくお願いいたします。

質問 先週はご迷惑をおかけしました。

— お気になさらずに。家庭の事情ならば仕方のない事です。

質問 テストがんばるちゃ!!

— 頑張ってください。計算ミスに注意です。

質問 昨日誕生日でした。

— それはおめでとうございました。

質問 祝ってください

— なにをでしょうか?

例題 14.5 の解答 (の一部)

例題 14.5  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  の固有値と固有ベクトルを求めよ .

解)  $A$  の固有値は  $\lambda = \pm 1$  である .

(i)  $\lambda = 1$  のとき .

固有ベクトルは , 連立一次方程式

$$(1 \cdot E_2 - A)\mathbf{x} = \left( \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の非自明な解である . この連立一次方程式を解けばよいが , 係数行列を簡約化すれば ,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので ,

$$x - y = 0$$

という (連立) 方程式の解を求めればよい .  $y = s$  (パラメータ) とすれば ,  $x = y = s$

なので ,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

よって , 固有値  $\lambda = 1$  に対応する固有ベクトルは  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  となる .