

線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分 演習問題^{*1}

1. 次の連立一次方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} x + 3y + 5z + w = 2 \\ 3x + y + 7z + 3w = 14 \\ 5x - y + 9z + w = 22 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} x - y + 7z + w = -10 \\ 5x - 11y - 23z - 7w = 22 \\ x - 4y - z - 5w = 8 \end{cases}$$

2. 次の行列の行列式を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 3 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -8 & 1 & -3 \\ -7 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

3. 高々 3 次の多項式全体のなす集合 $V = \mathbb{R}[x]_3$ がベクトル空間になることを確認せよ．

4. ベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_3$ において、次のような部分集合は、 V の部分空間となるか．

- (1) ちょうど 2 次の多項式全体， (2) $(x-1)$ で割り切れるような多項式全体，
(3) 定数項が 0 である多項式全体， (4) 各係数の和が 1 であるような多項式全体．

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ とおくとき、次の集合は \mathbb{R}^3 の部分空間となるか．

$$(1) W_1 = \{x \in \mathbb{R}^3; Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\}, \quad (2) W_2 = \{x \in \mathbb{R}^3; Ax = 0\}.$$

6.[†] 講義における命題 1.9 を示せ．すなわち、以下が同値になることを示せ．

$$W \subset V \text{ が部分空間} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{(i)} & 0 \in W, \\ \text{(ii)} & u, v \in W \Rightarrow u + v \in W, \\ \text{(iii)} & \lambda \in \mathbb{K}, v \in W \Rightarrow \lambda \cdot v \in W. \end{cases}$$

7.[†] V をベクトル空間とし、 W_1, W_2 をその部分空間とする．このとき次に答えよ．

- (1) $W_1 \cap W_2 := \{u \in W; u \in W_1 \text{ かつ } u \in W_2\}$ は V の部分空間であることを示せ，
(2) $W_1 + W_2 := \{u_1 + u_2 \in W; u_1 \in W_1, u_2 \in W_2\}$ は W の部分空間であることを示せ，
(3) $W_1 \cup W_2 := \{u \in W; u \in W_1 \text{ または } u \in W_2\}$ は部分空間かどうか．

8.* ベクトル空間 $V = M(2, \mathbb{R})$ の以下のような部分集合は、 V の部分空間となるか？

$$(1) \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) := \{A \in V; \operatorname{tr}(A) = 0\}, \quad (2) \mathfrak{so}(2, \mathbb{R}) := \{B \in V; B + {}^tB = O\}, \\ (3) SL(2, \mathbb{R}) := \{C \in V; \det C = 1\}, \quad (4) SO(2, \mathbb{R}) := \{D \in V; D {}^tD = E_2\}.$$

9.* $V = M(2n, \mathbb{R})$ の次のような部分集合 $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ に対して、以下の設問に答えよ．

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) := \{X \in V; {}^tXJ + JX = O\}, \quad J := \begin{pmatrix} O_n & E_n \\ -E_n & O_n \end{pmatrix}.$$

- (1) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ は V の部分空間となることを示せ．
(2) $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$ の元はどのような形をしているか？ブロック行列を用いて表現せよ．

^{*1} 凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，* は応用問題．

線形代数学・同演習 B

10 月 18 日分 演習問題*¹

1.[†] W_1, W_2 は $V = \mathbb{R}^2$ の, W_3, W_4 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間となるか.

- (1) $W_1 = \{(y, ay); y \in \mathbb{R}\}$ (a は定数) (2) $W_2 = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\}$
 (3) $W_3 = \{f \in C(\mathbb{R}); f(x) + f(x)^2 = 0\}$ (4)* $W_4 = \{g \in C(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty\}$.

2. 次の \mathbb{R}^3 のベクトルの組は線形独立か?

$$(1) (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (2) (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4$ は線形独立とする. このとき, 次のベクトルは線形独立となるか?

$$(1) \begin{cases} \mathbf{v}_1 = 2\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{v}_2 = -\mathbf{u}_1 + 2\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{v}_3 = -\mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 - \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{v}_4 = -\mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 + 2\mathbf{u}_3 + \mathbf{u}_4 \\ \mathbf{w}_2 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3 + 2\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{w}_3 = 3\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + 4\mathbf{u}_3 + 12\mathbf{u}_4 \\ \mathbf{w}_4 = 2\mathbf{u}_1 + 3\mathbf{u}_3 + 10\mathbf{u}_4 \end{cases}$$

4. $V = \mathbb{R}[x]_3$ を 3 次以下の多項式全体のなすベクトル空間とする.

- (1) 多項式の組 $1, 1+x, (1+x)^2, (1+x)^3$ は線形独立であることを示せ.
 (2) 多項式 $p(x) = x^3$ を (1) の多項式の線形結合で表わせ.

5.[†] 次のベクトル (多項式) の組において, 線形独立なベクトル (多項式) の最大個数 r と*², その r 個のベクトル (多項式) の組を一組求めよ.

$$(1) (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4, \mathbf{v}_5) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & 5 & 6 \\ -2 & 1 & 1 & -5 & -7 \\ 3 & 5 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(3) p_1(x) = 1 + 2x - x^2, p_2(x) = 1 + x - x^2, p_3(x) = -2 - 5x + 2x^2, \\ p_4(x) = 4 + 6x - 2x^2, p_5(x) = 3x - 2x^2$$

6.[†] ベクトル空間 V に対し, 次の命題が正しいならば証明し, 間違っているならば反例を示せ.

- (1) $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が線形独立ならば, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_3$ も線形独立.
 (2) $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ が線形独立ならば, $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n-1} + \mathbf{v}_n$ および $\mathbf{v}_n + \mathbf{v}_1$ も線形独立.

7.* $P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n]$ とおく*³. 次の問に答えよ.

- (1) $n = 0, 1, 2$ に対して, 各 $P_n(x)$ を求めよ.
 (2) $P_0(x), P_1(x), P_2(x)$ は線形独立となることを示せ.

*¹ 凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題.

*² 線形独立な r 本のベクトルの組が存在するが, どの $r+1$ 本のベクトルの組も線形従属となるような数 r のこと.

*³ このようにして定義される多項式を Legendre 多項式と呼ぶ.

線形代数学・同演習 B

10 月 25 日分 演習問題^{*1}

1. 次のベクトルの組の中で，線形独立なものの最大個数 r と r 個の線形独立なベクトルを一組求め，他のベクトルをこれらの線形結合で表わせ．

$$(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & -7 & 5 & -6 \\ 2 & 0 & -6 & 6 & -6 \\ 3 & -3 & -12 & 6 & -9 \end{pmatrix}$$

2. 次のベクトルの組は， \mathbb{R}^4 の基底をなすか？

$$(1) (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ -4 & 1 & 6 & 1 \\ 5 & -1 & 1 & -3 \\ 7 & -6 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2) (\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & -2 & -8 \\ -3 & -4 & 1 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & 9 \end{pmatrix}$$

3. V を 2 変数の高々 1 次の多項式 $ax + by + c$ の全体がなす集合とする．

- (1) V は自然な演算でベクトル空間となることを示せ．
(2) V の次元はいくつか？ また V の自然な基底を 1 組求めよ．
(3) 平面の 3 点 $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (1, 0)$, $P_3 = (0, 1)$ において，それぞれ指定された値 c_1, c_2, c_3 をとるような V の元を表すのに最も適した V の基底を求めよ．^{*2}

- 4.[†] 次の多項式の組の中で，線形独立なものの最大個数 r と r 個の線形独立な多項式を一組求め，他の多項式をこれらの線形結合で表わせ．

$$\begin{aligned} (1) \quad & p_1(x) = 1 - x - 2x^2 - x^3, \quad p_2(x) = 3 - x - 2x^2, \quad p_3(x) = 2 + x^3, \\ & p_4(x) = -9 + 7x + 7x^2 - x^3, \quad p_5(x) = -6 + 4x + x^2 - 4x^3. \\ (2) \quad & q_1(x) = 1 + 3x + 2x^2 + 4x^3, \quad q_2(x) = 1 + x - 2x^2 - x^3, \quad q_3(x) = 2 + 4x + 3x^3, \\ & q_4(x) = 1 - x - 6x^2 - 6x^3, \quad q_5(x) = 5x + x^2 + 2x^3. \end{aligned}$$

- 5.[†] n 次の対称行列全体の集合を $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ で表す．

- (1) $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ はベクトル空間となることを示せ．
(2) $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$ の次元を求めよ．

- 6.[†] $\mathbb{R}[x]_2$ において，多項式 $a + bx + cx^2$ を次の基底 q_1, q_2, q_3 に関してベクトル表示せよ．

$$\begin{aligned} (1) \quad & q_1(x) = x^2, \quad q_2(x) = x, \quad q_3(x) = 1 \\ (2) \quad & q_1(x) = 1, \quad q_2(x) = 1 + x, \quad q_3(x) = 1 + x + x^2 \\ (3) \quad & q_1(x) = 1 + 2x - 2x^2, \quad q_2(x) = 2 + 5x - 2x^2, \quad q_3(x) = -2 - 2x + 9x^2 \end{aligned}$$

- 7.* (1) 複素数 \mathbb{C} は実数体 \mathbb{R} 上のベクトル空間とみなせることを示し，その次元を求めよ．

- (2) 実数の集合 \mathbb{R} は有理数の集合 $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ 上のベクトル空間とみなせることを示せ．また，円周率 π が超越数^{*3}であることを利用して，その次元は無限大となることを証明せよ．

^{*1} 凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，* は応用問題．

^{*2} $f_i(P_j) = \delta_{ij}$ ($i, j = 1, 2, 3$) となる多項式 f_1, f_2, f_3 を求めればよい．

^{*3} どんな整数係数 (有理数係数) 多項式 $p(x)$ に対しても $p(x_0) \neq 0$ であるとき，実数 x_0 を超越数という．

線形代数学・同演習 B

11 月 1 日分 演習問題^{*1}

- (1) $v_1, \dots, v_s \in V$ に対して, $\text{Span}(v_1, \dots, v_s)$ が V の部分空間となることを確認せよ.
(2) $m \times n$ 行列 A に関する解空間 $\ker A$ が \mathbb{R}^n の部分空間となることを確認せよ.
- 次のベクトルで生成される部分空間の次元と, その基底を一組求めよ.

$$(1) (a_1, \dots, a_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 6 \\ 5 & -1 & 4 & -6 \\ -3 & -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad (2) (b_1, \dots, b_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & -7 & 3 \\ -1 & -1 & 2 & 1 & -9 \end{pmatrix}$$

- $V = \mathbb{R}[x]_3$ とする. 次の多項式たちで生成される V の部分空間の次元と基底を求めよ.

$$(1) f_1(x) = 1 - x^2 + x^3, f_2(x) = -1 + x + 2x^2 - 2x^3, f_3(x) = 2 + x - x^2 + x^3.$$
$$(2) g_1(x) = 1 - x - 2x^2 + x^3, g_2(x) = 2 - 5x - 4x^2 + 2x^3, g_3(x) = 3 + 4x - 6x^2 + 3x^3,$$
$$g_4(x) = 4 + 6x + 6x^2 + 2x^3, g_5(x) = 5 + 1x - 3x^2 + 4x^3.$$
$$(3) H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x^2}) \quad (n = 0, 1, 2, 3).^{*2}$$

- 次の行列に関する解空間の次元と, その基底を一組求めよ.

$$(1) A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 13 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 4 \\ 3 & -3 & 1 & -6 \\ -1 & 1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$$

- 次の二組の基底 $[u], [\tilde{u}]$ に関する変換行列 P を求めよ.^{*3}

$$(1) [u] = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, [\tilde{u}] = \begin{pmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) [u] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, [\tilde{u}] = \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(3) [u] = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -3 & 10 & -11 \\ 3 & -11 & 14 \end{pmatrix}, [\tilde{u}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- 基底の変換行列 P が必ず正則になることを示せ.^{*4}

- W をベクトル空間 V の部分空間とする. このとき, 次の二つの命題を証明せよ.

- (1) $\dim W \leq \dim V$,
- (2) $\dim W = \dim V$ ならば, $W = V$ となる.

- ^{*5} 実数の無限数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の全体に, 和とスカラー倍を

$$\{a_n\}_{n=0}^{\infty} + \{b_n\}_{n=0}^{\infty} = \{a_n + b_n\}_{n=0}^{\infty}, \quad \lambda \{a_n\}_{n=0}^{\infty} = \{\lambda a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

で定めると, これはベクトル空間になる. さて, V を漸化式 $x_{k+3} = 7x_{k+1} + 6x_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を満たす数列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ 全体の集合とすると, 次の問いに答えよ.

- (1) V は線形空間になることを示せ. またその次元はいくつか.
- (2) V の基底で, 数列の一般項が明白なものを一組与えよ.^{*5}

^{*1} 凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題.

^{*2} このようにして構成される多項式を Hermite 多項式とよぶ.

^{*3} $[\tilde{u}] = [u]P$ となる正則行列 P を求める.

^{*4} ヒント: P の列ベクトルたちが線形独立となることを示せばよい.

^{*5} ヒント: 漸化式の特徴方程式は $x^{k+3} = 7x^{k+1} + 6x^k$ を共通因子 x^k で割ったもの.

線形代数学・同演習 B

11 月 8 日分 演習問題^{*1}

- 1.[†] U, V を一般のベクトル空間とし, $T: U \rightarrow V$ はその間の線形写像とする. このとき, $\text{rank}(T) + \text{null}(T) = \dim(U)$ が成り立つことを次の方針に従って示せ. ここで $r = \text{rank}(T)$, $s = \text{null}(T)$ とおき, u_1, \dots, u_r を $\text{Ker}(T)$ の基底, v_1, \dots, v_s を $\text{Im}(T)$ の基底とする.
- (1) $T(u_{r+j}) = v_j$ かつ $u_{r+j} \notin \text{Ker}(T)$ ($j = 1, \dots, s$) となる U の要素 u_{r+1}, \dots, u_{r+s} が存在することを示せ.
- (2) U の任意の要素 u は, $u_1, \dots, u_r, u_{r+1}, \dots, u_{r+s}$ の線形結合で表されることを示せ^{*2}.
- (3) u_1, \dots, u_{r+s} は線形独立であることを示せ.
- 2.[†] U, V を一般のベクトル空間とし, $T: U \rightarrow V$ はその間の線形写像とする.
- (1) $\text{Im}(T)$ は V の部分空間となることを示せ.
- (2) $\text{Ker}(T)$ は U の部分空間となることを示せ.
3. 次の行列 A に対して, (a) T_A の退化次元と $\text{Ker}(T_A)$ の基底, (b) T_A の階数と $\text{Im}(T_A)$ の基底, をそれぞれ求めよ.

$$\begin{aligned}
 (1) \begin{pmatrix} 1 & -4 & -9 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -4 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -5 & 5 & -5 & 20 \end{pmatrix} \\
 (4) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & -4 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \\ 4 & -4 & -4 & -1 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 & -6 \\ -5 & 1 & -3 & 2 \\ -2 & -1 & -4 & -2 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 & -5 \\ -3 & 2 & -9 & -1 & -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

4. 次の写像は線形となるか調べよ.

$$\begin{aligned}
 (1) T_1: \mathbb{R}^4 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2) T_2: \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 x_2 \in \mathbb{R} \\
 (3) T_3: \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (4) T_4: \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto \int_{-1}^1 p(t) dt \in \mathbb{R} \\
 (5) T_5: \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto p(0) \in \mathbb{R} \quad (6) T_6: \mathbb{R}[x]_3 \ni p \mapsto x + p'(x) \in \mathbb{R}[x]_3
 \end{aligned}$$

- 5.[†] $V = \mathbb{R}[x]_3$ とし, 写像 $T: V \rightarrow V$ を以下で定義する.

$$T: p(x) \mapsto xp'(x) - 3p(x-1)$$

- (1) T は線形写像となることを示せ.
- (2) T の退化次元と階数をそれぞれ求めよ.
- (3) $\text{Im}(T)$ の基底を一組求めよ.

^{*1} 凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題.

^{*2} まず $T(u)$ を考える.

線形代数学・同演習 B

11 月 15 日分 演習問題*¹

1. $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ とする．このとき，以下の基底に関する T_A の表現行列をそれぞれ求めよ．
- (1) \mathbb{R}^2 の基底は $\left[\begin{pmatrix} 7 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$ ， \mathbb{R}^3 の基底は $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$
- (2) \mathbb{R}^2 の基底は $\left[\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$ ， \mathbb{R}^3 の基底は $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right]$
- 2.[†] $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ とする． \mathbb{R}^3 の基底をいずれも次のものとするとき，この基底に関する T_A の表現行列をそれぞれ求めよ*²．

$$(1) \left[\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \quad (2) \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$$

- 3.[†] $U = \mathbb{R}[x]_3$, $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，写像 $T: U \rightarrow V$ を $T: p(x) \mapsto p'(2x+1)$ で定める*³．
- (1) T は線形写像となることを示せ．
- (2) U, V の標準基底 $([x^2, x, 1]$ および $[x, 1])$ に関する表現行列を求めよ．
- (3) U, V の基底をそれぞれ $[(x+1)^2, x+1, 1]$, $[x+1, 1]$ としたときの表現行列を求めよ．
- 4.* 線形写像 $T: U \rightarrow V$ が全射・単射および全単射であることを以下のように定義する：
- T が全射 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ 任意の V の元 v に対して $T(u) = v$ となる $u \in U$ が存在する．
- T が単射 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ U の任意の二元 u, u' に対して $T(u) = T(u')$ ならば $u = u'$ となる．
- T が全単射 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ T が全射かつ単射
- また T が全単射であるとき U と V は同型であるという．以下を示せ．
- (1) T が全射 $\iff \dim \text{Im } T = \dim V$ (2) T が単射 $\iff \ker T = \{0\}$
- (3) 任意の n 次元実ベクトル空間 U は， n 次元数ベクトル空間 \mathbb{R}^n と同型になる．

・以下は旧課程における大学入試問題です．講義の記号に合わせて文章を変えています．

- 5.* (2009 年京都大学 (理系・前期) より)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M(2, \mathbb{R})$ を $\det A = 1$ を満たす行列とする．自然数 n に対して平面上の点 $x_n \in \mathbb{R}^2$ を $x_n = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ により定める． $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$ であるとき，すべての n に対して $\|x_n\| = 1$ であることを示せ*⁴

- 6.* (2008 年大阪大学 (理系・前期) より)

O を 2 次の零行列， E を 2 次の単位行列とする．また 2 次の正方行列 A_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) を

$$A_0 := O, \quad A_n := B + A_{n-1}C \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定める．ただし， B と C は 2 次の正方行列である．

- (1) $A_n(E - C)$ を B と C を用いて表わせ．
- (2) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ とするとき， A_{3n} を求めよ．

¹ 凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題， は応用問題．

*² つまり， $T_A: U \rightarrow V$ としたとき， $U = V$ なので，その基底として同じものをとる．

*³ $p(x)$ を微分した $p'(x)$ において， $x \mapsto 2x+1$ としたもの．

*⁴ ヒント：回転行列と Cayley-Hamilton の定理．ここで $x = {}^t(x, y)$ に対して $\|x\| := \sqrt{x^2 + y^2}$ である．

線形代数学・同演習 B

11 月 22 日分 演習問題*¹

1. 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$$

2.[†] 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$\begin{aligned} (1) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} & (2) & \begin{pmatrix} 8 & -8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (3) & \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ (4) & \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (5) & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & (6) & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 7 & 9 \\ -1 & -7 & -9 \end{pmatrix} \\ (7) & \begin{pmatrix} 7 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 4 \\ -8 & -2 & -6 \end{pmatrix} & (8) & \begin{pmatrix} -7 & 6 & -6 \\ -4 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 \end{pmatrix} & (9) & \begin{pmatrix} 7 & -8 & -5 \\ 6 & -7 & -6 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.[†] 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$$

4. 次の行列の固有多項式を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -3 & 2 & -4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

5. 3 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3}$ の固有多項式は、次の形をしていることを示せ．

$$g_A(t) = t^3 - (a_{11} + a_{22} + a_{33})t^2 + (|A_{11}| + |A_{22}| + |A_{33}|)t - \det A.$$

ただし、 A_{ii} は i 行 i 列に関する A の余因子である．

6.[†] $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ について、次の S, T を A の一次多項式で表わせ*²．

$$(1) S = 2A^4 - 12A^3 + 19A^2 - 29A + 37E_2 \quad (2) T = S^{-1}$$

7. Cayley-Hamilton の定理を用いて、次の行列の n 乗を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¹ 凡例：無印は基本問題、[†] は特に解いてほしい問題、 は応用問題．

*² ヒント：Cayley-Hamilton の定理．

線形代数学・同演習 B

12 月 13 日分 演習問題*¹

1. 次の行列の固有値および対応する固有空間を求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ 9 & 16 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.[†] $V = \mathbb{R}[x]_n$ (n は自然数) とし, $T: V \rightarrow V$ を V 上の線形変換とする．このとき, 次のような部分集合は V の部分空間となるか．なるのならばそれを証明し, ならないのであればその反例を挙げよ．

- (1) 線形変換 T の像 $\text{Im}(T)$ (2) $W_1 := \{q(x) \in V; \text{最高次の係数が } 1 \text{ である多項式全体}\}$
 (3) 線形変換 T の核 $\text{Ker}(T)$ (4) $W_2 := \{p(x) \in V; T(p(x)) = x\}$

3. $V = \mathbb{R}[x]_1$ とする．次の線形変換 T_1, T_2, T_3 に対して, (i) 固有多項式, (ii) 固有値と対応する固有空間, をそれぞれ求めよ．

$$(1) T_1(p(x)) = xp'(x) \quad (2) T_2(p(x)) = p'(x) + p(0)x \quad (3) T_3(p(x)) = \frac{1}{x} \int_0^x p(t) dt + p(0)$$

4. a, b を任意の実数 (ただし $a \neq 0, 1, b \neq 0$) とする．また, 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して $\mathbb{R}[x]_n$ 上の線形変換 T_n を, $T_n(p(x)) := p(ax + b)$ により定義する．

- (1) $n = 1$ のとき, T_1 の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．
 (2)[†] $n = 2$ のとき, T_2 の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．
 (3)* 一般の n に対して, T_n の固有値と, 対応する固有空間を求めよ．

5.[†] $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし, 基底は標準基底 $[x^2, x, 1]$ であるとする． V 上の線形変換 T の表現行列 A が以下のように与えられているとき, T の固有値および対応する固有空間をそれぞれ求めよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -3 & 0 & -12 \\ 0 & -2 & -15 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 3 & 10 & -21 \\ 3 & 6 & -11 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 6 & -1 & -5 \\ -5 & 2 & 5 \\ 5 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

6.[†] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ は対角化できないことを示せ．*²

7.* W_1, W_2 をベクトル空間 V の部分空間とする． $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ であるとき, $W_1 \oplus W_2 := \{w_1 + w_2 \in V; w_1 \in W_1, w_2 \in W_2\}$ を W_1 と W_2 の直和という．このとき, 以下を示せ．

- (1) $w_1 \in W_1, w_2 \in W_2$ が $w_1 + w_2 = 0$ を満たすならば, $w_1 = 0$ かつ $w_2 = 0$ ．
 (2) $w_j, w'_j \in W_j$ ($j = 1, 2$) が $w_1 + w_2 = w'_1 + w'_2$ を満たすならば, $w_1 = w'_1, w_2 = w'_2$ ．

*¹ 凡例：無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, * は応用問題．

*² 対角化できるとすると, ある対角行列 $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ と 正則 行列 P を用いて $D = P^{-1}AP \Leftrightarrow PD = AP$ を満たすはずだが, そのような P, D が存在しないことを示す．

線形代数学・同演習 B

12 月 20 日分 演習問題^{*1}

1. 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 9 & -10 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$$
$$(5) \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -4 & -7 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (7) \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 10 & 8 \end{pmatrix} \quad (8) \begin{pmatrix} 9 & -7 \\ 14 & -12 \end{pmatrix}$$

2. 問題 1 の行列の中で対角化できるものについて，その n 乗を計算せよ．

3.[†] 次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -4 & 3 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} -1 & 4 & 9 \\ -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & -6 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$
$$(4) \begin{pmatrix} 2 & -10 & 6 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 7 & -3 & -6 \\ 6 & -2 & -6 \\ 6 & -3 & -5 \end{pmatrix} \quad (6) \begin{pmatrix} -3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & -5 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

4. A を対角化可能な n 次正方行列とする．また， A の互いに異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ とし，それぞれの重複度を m_1, \dots, m_r と書く^{*2}．このとき，次が成り立つことを示せ^{*3}．

$$(1) \operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^r m_i \lambda_i \quad (2) \det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i^{m_i}$$

5. A, B を n 次正方行列とし，さらに A は正則行列と仮定する^{*4}．このとき， AB の固有多項式と BA の固有多項式は一致することを示せ^{*5}．

6.[†] 行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を考える． A を対角化することにより，その n 乗 A^n を求めよ．また，数列 f_n を次の関係式で定めるとき， f_n の一般項を A^n を用いて求めよ．

$$f_1 = f_2 = 1, \quad \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} f_n \\ f_{n-1} \end{pmatrix} \quad (n \geq 1).$$

7.* 講義における命題 9.3 を証明せよ．すなわち，ベクトル空間 V 上の線形変換 $T: V \rightarrow V$ の互いに異なる固有値を $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ としたとき，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; T) \leq \dim V.$$

^{*1} 凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，* は応用問題．

^{*2} $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ と書いたとき， $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ である．また， $\prod_{i=1}^r a_i = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_r$ である．

^{*3} 実は任意の正方行列で成り立つ．

^{*4} 実はこの仮定は不要である．

^{*5} よって，特にそれぞれの固有値は重複度を込めて一致する．

線形代数学・同演習 B

1 月 10 日分 演習問題^{*1}

数ベクトル \mathbb{R}^n の内積は標準内積により与えられているとする．また，多項式空間の内積は，特に断らない限り $(p|q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$ により与えられているとする．

1. 次の \mathbb{R}^3 の 2 本のベクトルと直交するベクトルをそれぞれ一つずつ求めよ^{*2}．

$$(1) \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- 2.[†] 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の 2 本の多項式と直交する多項式を，それぞれ一つずつ求めよ．

$$(1) \quad p(x) = 4x^2 + 1, \quad q(x) = x^2 \quad (2) \quad p(x) = x - 1, \quad q(x) = x \\ (3) \quad p(x) = 2x - 1, \quad q(x) = x^2 \quad (4) \quad p(x) = 2x + 3, \quad q(x) = x^2 + x + 1$$

3. $M(n, \mathbb{R})$ を n 次正方形行列全体のなすベクトル空間とする． $A, B \in M(n, \mathbb{R})$ に対して $(A|B) := \text{tr}({}^tAB)$ により定義するとき， $(\cdot|\cdot)$ は内積の性質を満たすことを確認せよ．
4. $V = \mathbb{R}[x]_2$ とし，内積の定義において積分範囲を $[0, 1]$ に変更したものを考える：

$$(p|q)_0 := \int_0^1 p(x)q(x) dx \quad (p, q \in V).$$

このとき， $(\cdot|\cdot)_0$ も内積の性質を満たすことを確認せよ．また多項式 p, q に対して，通常の内積での値 $(p|q)$ と，この内積での値 $(p|q)_0$ が異なることを確認せよ．

- 5.[†] 区間 $[-1, 1]$ 上の (連続とは限らない) 実数値関数全体のなす空間 V はベクトル空間となる．このとき，次で定義される $(\cdot|\cdot)$ は V の内積となるか：

$$(f|g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (f, g \in V).$$

- 6.[†] 内積空間 V の部分空間 W に対して， V の部分集合 W^\perp を次のように定義する：

$$W^\perp := \{v \in V; \text{すべての } w \in W \text{ に対して } (v|w) = 0\}.$$

(1) W^\perp は V の部分空間となることを示せ^{*3}． (2) $W \cap W^\perp = \{0_V\}$ を示せ．

- 7.[†] 区間 $[-\pi, \pi]$ 上の滑らかな関数全体のなす集合を V とすると，これはベクトル空間となる．さて， V の内積を $(f|g) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ により定める．また，整数 $n, m \geq 1$ に対して， $s_n(x) := \sin nx$, $c_m(x) := \cos mx$ とおく．このとき，次の内積を計算せよ^{*4}．

$$(1) (s_n|c_m) \quad (2) (s_n|s_m) \quad (3) (c_n|c_m)$$

- 8.* $V = \mathbb{R}^2$ とし，2 次正方形行列 A に対して $(x|y)_A := {}^tAx y$ とおく．このとき， $(\cdot|\cdot)_A$ が内積となるための A の条件を求めよ．

^{*1} 凡例：無印は基本問題，[†] は特に解いてほしい問題，* は応用問題．

^{*2} 数ベクトルの場合は外積 (クロス積) で求めることができる．

^{*3} この W^\perp を， W の V における直交補空間という．

^{*4} (2), (3) は $n = m$ かどうかで場合分けが必要．

線形代数学・同演習 B

1 月 17 日分 演習問題^{*1}

1. 次の \mathbb{R}^2 の基底 (v_1, v_2) を Gram-Schmidt の直交化法により直交化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

2.[†] 次の \mathbb{R}^3 の基底 (v_1, v_2, v_3) を Gram-Schmidt の直交化法により直交化せよ.

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.[†] 次の $\mathbb{R}[x]_2$ の基底を Gram-Schmidt の直交化法により直交化せよ. ただし内積は $(f|g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx$ とする.

$$(1) p_1(x) = 1, p_2(x) = x, p_3(x) = x^2.$$

$$(2) q_1(x) = x^2, q_2(x) = x, q_3(x) = 1.$$

$$(3) r_1(x) = -x, r_2(x) = -x^2 + x, r_3(x) = -x^2 + x - 1.$$

4. \mathbb{R}^2 の正規直交基底は次の形のもので尽くされることを示せ.

$$(1) u_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2) v_1 = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \end{pmatrix}$$

5. 2 次の直交行列をすべて求めよ.

6.[†] 任意の 3 次正則行列 A は, ある直交行列 P と上三角行列 U を用いて $A = PU$ という積でかけることを示せ^{*2}.

7.* 整数 $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ に対して $H_n(x) := (-1)^n e^{x^2} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right)$ とおく^{*3}. また, 二つの多項式 f, g に対して $(f|g)_H := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)e^{-x^2} dx$ とする^{*4}.

(1) $n = 0, 1, 2, 3, 4$ に対して $H_n(x)$ を求めよ.

(2) 各 $H_n(x)$ は n 次の多項式となることを示せ.

(3) $(\cdot|\cdot)_H$ は $\mathbb{R}[x]_n$ (n は任意の自然数) の内積を定めることを示せ.

(4) この内積 $(\cdot|\cdot)_H$ に関して, 多項式 $H_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は直交していることを示せ.

8.* n 次直交行列全体のなす集合を $O(n)$ とするとき, $O(n)$ は群になることを示せ. すなわち, 以下の 3 つが成り立つことを確かめよ.

$$(1) E_n \in O(n),$$

$$(2) P, Q \in O(n) \Rightarrow PQ \in O(n),$$

$$(3) P \in O(n) \Rightarrow P^{-1} \in O(n).$$

^{*1} 凡例: 無印は基本問題, [†] は特に解いてほしい問題, * は応用問題.

^{*2} ヒント: Gram-Schmidt の直交化法. これは任意の n 次正則行列で成り立つ.

^{*3} この多項式を Hermite 多項式という.

^{*4} 重み e^{-x^2} を持つ積分である.

線形代数学・同演習 B

1 月 24 日分 演習問題^{*1}

1. 2 次の回転行列 $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ が、任意の数ベクトル $x \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|P(\theta)x\| = \|x\|$ を満たすことを直接確かめよ。

2.[†] 次の 3 次実対称行列は正定値かどうか調べよ。

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

3. X を n 次の実交代行列、すなわち ${}^tX = -X$ を満たす n 次正方行列とする。

(1) X の固有値は常に純虚数もしくは 0 になることを示せ。

(2) λi が X の固有値とすると、その複素共役 $-\lambda i$ も X の固有値となることを示せ。

(3) n が奇数のとき、 $\det X = 0$ となることを示せ^{*2}。

4.[†] 2 次対称行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ に対して、(1) A が正定値であることと、(2) $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ を満たすことが同値であることを示せ。

5.[†] 任意の 2 次正定値対称行列 A は、適当な下三角行列 L を用いて $A = L {}^tL$ とかけることを示せ。また、この下三角行列 L は一意に定まることも示せ^{*3}。

6. A を n 次対称行列とし、 X を n 次交代行列とする。このとき、常に $\text{tr}(AX) = 0$ となることを示せ^{*4}。

7.* $\lambda, \mu > 0$ とする。 \mathbb{R}^2 において、 $(\cdot | \cdot)_0$ を $(x | y)_0 := \lambda x_1 y_1 + \mu x_2 y_2$ により定義する。

(1) $(\cdot | \cdot)_0$ は \mathbb{R}^2 の内積を定めることを示せ。

(2) この内積に関する転置行列 \tilde{X} は^{*5}、通常転置行列を用いてどのように表されるか。

(3) この内積に関する直交行列、すなわち以下を満たす行列 P はどのような条件を満たすか。

$$\text{任意の } x, y \text{ に対して } (Px | Py)_0 = (x | y)_0.$$

8.* 2 次正則行列 A に対して \mathbb{R}^2 の有界な領域における変数変換 $u \mapsto x = Au$ を考える。この変換の Jacobian を求めよ。また、 A が直交行列ならば Jacobian は常に 1 となることを確認せよ。

9.* 正方行列 A に対して、指数写像 \exp を $\exp A := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$ により定義する。このとき、次の行列を指数写像で写したものを求めよ。

$$(1) \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 0 & -\theta \\ \theta & 0 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

^{*1} 凡例：無印は基本問題、[†] は特に解いてほしい問題、* は応用問題。

^{*2} 12 月 20 日の問題 4 を用いる。この結果は任意の正方行列で成り立つことに注意。

^{*3} このような分解を Gauss 分解もしくは Cholesky 分解という（分野によって呼び方が異なる）。なお、この分解は任意の次数の正定値対称行列に対して成立する。

^{*4} 任意の行列 M に対して ${}^tM = M$ が成り立つことを用いる。

^{*5} 任意の $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して $(Xx | y)_0 = (x | \tilde{X}y)_0$ を満たす 2 次正方行列 \tilde{X} のこと。

線形代数学・同演習 B

1 月 31 日分 演習問題*¹

1. 次の 2 次対称行列を直交行列により対角化せよ .

$$(1) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \quad (4) \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \quad (5) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

2.[†] 次の 3 次対称行列を直交行列により対角化せよ*² .

$$\begin{array}{lll} (1) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} & (2) \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} & (3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ (4) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} & (5) \begin{pmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} & (6) \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ (7) \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} & (8) \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} & (9) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

3. 次の行列について以下の問いに答えよ .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a \\ 1 & a & b \end{pmatrix}.$$

(1) $\det A$ を因数分解した形で求めよ .

(2) $\text{rank } A = 2$ となる条件を a, b を用いて表せ .

(3) 行列 A が正定値となる条件を a, b を用いて表せ .

4.* n 変数 2 次同次多項式 $f(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ を 2 次形式という .

(1) 任意の 2 次形式 f は , ある対称行列 A を用いて $f(x) = {}^t x A x$ と表せることを示せ .

(2) (1) の行列 A を 2 次系式 f の表現行列という . 基底変換 $y = Sx$ により f を y の 2 次形式と思うと , その表現行列は ${}^t S A S$ となることを示せ .

(3) 任意の 2 次系式は , 直交座標変換で $\lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$ という形に変換できることを示せ .

5.* 次の積分を以下の二通りの方法で計算せよ .

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy \quad (a > 0, ac - b^2 > 0)^{*3}.$$

(1) 対称行列の直交行列による対角化を用いる .

(2) 正定値対称行列 A は下三角行列 L により $A = L {}^t L$ と書けることを用いる .

*¹ 凡例 : 無印は基本問題 , † は特に解いてほしい問題 , * は応用問題 .

*² 少なくとも (6) までは確実に計算できるようになっておくこと .

*³ ヒント : $ax^2 + 2bxy + cy^2 = (Ax | x)$ と考える . また (2) のような分解を Gauss 分解あるいは Cholesky 分解という (分野で呼び方が違う) .