

線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$C(\mathbb{R})$ を連続な実数値関数全体のなすベクトル空間とする．このとき，次の W_1, W_2 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間になるかどうか調べよ．ただし， $C(\mathbb{R})$ の零関数は f_0 で表すこととする．

(1) $W_1 = \{f(x) \in C(\mathbb{R}); f(0) = 0, f(1) = 1\}$,

(2) $W_2 = \{f(x) \in C(\mathbb{R}); f \text{ は微分可能かつ } xf'(x) = 2f(x)\}$.

解) 命題 1.9 の条件 (を関数空間 $C(\mathbb{R})$ に合わせて書き直したもの)

$$(i) f_0 \in W_j, \quad (ii)' f, g \in W_j, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f + \mu g \in W_j \quad (j = 1, 2)$$

を調べればよい．

(1) 条件 (i) について， $f_0(1) = 0 \neq 1$ であるため， f_0 は W_1 に属するための条件を満たさない．つまり $f_0 \notin W_1$ なので， W_1 は $C(\mathbb{R})$ の部分空間でない．

(2) 条件 (i) について， f_0 は値が 0 の定数関数なので，任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $f'_0(x) = 0$ である．よって W_2 に属するための条件 $xf'_0(x) = 2f_0(x)$ を満たすので， $f_0 \in W_2$ ．次に条件 (ii)' について， $f, g \in W_2$ とすると，

$$xf'(x) = 2f(x), \quad xg'(x) = 2g(x)$$

を満たす．さて， $h = \lambda f + \mu g$ とおけば，

$$\begin{aligned} xh'(x) &= x(\lambda f(x) + \mu g(x))' = x(\lambda f'(x) + \mu g'(x)) = \lambda \cdot xf'(x) + \mu \cdot xg'(x) \\ &= \lambda \cdot 2f(x) + \mu \cdot 2g(x) = 2h(x). \end{aligned}$$

よって $h = \lambda f + \mu g \in W_2$ である． W_2 は条件 (i), (ii)' を満たすので， $C(\mathbb{R})$ の部分空間となる．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

10 月 18 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

ベクトル空間 $V = \mathbb{R}[x]_2$ において，次の多項式の組は線形独立かどうか判定せよ．

$$(1) \quad p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = 1 + x, \quad p_3(x) = 1 + x + x^2.$$

$$(2) \quad q_1(x) = 1 - x + 2x^2, \quad q_2(x) = 1 + x + 3x^2, \quad q_3(x) = -1 + 7x + x^2.$$

ただし， $1, x, x^2$ が線形独立であることは既知とする．

(考え方) ‘方程式’ $ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = 0$ の解 (a, b, c) について調べ，その解が $(0, 0, 0)$ のみならば線形独立，それ以外の解を持つならば線形従属である．

(1) $ap_1(x) + bp_2(x) + cp_3(x) = (a + b + c) \cdot 1 + (b + c)x + cx^2$ なので，上記の方程式は次の連立一次方程式

$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ b + c = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

の解と一致するが，これを解けば $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ であるので， p_1, p_2, p_3 は線形独立である．

(2) $aq_1(x) + bq_2(x) + cq_3(x) = (a + b - c) \cdot 1 + (-a + b + 7c)x + (2a + 3b + c)x^2 = 0$ なので，上記の方程式は次の連立一次方程式

$$\begin{cases} a + b - c = 0 \\ -a + b + 7c = 0 \\ 2a + 3b + c = 0 \end{cases}$$

の解と一致するが，この係数行列を簡約化すると，

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり，この連立方程式はパラメータを持つ．つまり $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ 以外の解を持つので， q_1, q_2, q_3 は線形従属となる．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

10 月 25 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次のベクトルの組は \mathbb{R}^4 の基底をなすかどうか調べよ．

$$(1) (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 19 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 10 \end{pmatrix} \quad (2) (b_1, b_2, b_3, b_4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

解) 右辺の行列が正則かどうかを調べればよい．その確認方法は簡約化して単位行列になるかどうかを見る方法と行列式を計算して 0 かどうかを見る方法があるが，ここでは行列式を用いて確認する．

(1) 基底をなす．

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -1 \\ 3 & 6 & 19 & -5 \\ 1 & -1 & -5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 3 & 16 & -8 \\ 0 & -2 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 16 & -8 \\ -2 & -8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 31 \neq 0.$$

(2) 基底にはならない．

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

11 月 1 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

ベクトル a_1, a_2, a_3, a_4 および行列 A を次のように定める．このとき，次の問題に答えよ．

$$A = (a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

- (1) \mathbb{R}^3 の部分空間 $W_1 := \text{Span}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ の次元と，その基底を一組求めよ．
- (2) 行列 A に関する解空間 $W_2 := \ker A$ の次元と，その基底を一組求めよ．

解) まず簡約化を行う．

$$\begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ -2 & 8 & 1 & 6 \\ -1 & 4 & -3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (1) ベクトルの組 a_1, \dots, a_4 における線形独立なものの最大個数は，上記の簡約化における主成分の数と一致するので， $\dim W_1 = 2$ である．その基底としては，主成分がある列に対応するベクトルを持ってくれば良いので， a_1, a_3 が W_1 の基底となる．
- (2) 解空間は連立一次方程式 $Ax = 0$ の解であるので，上記の簡約化より，

$$\begin{cases} x - 4y - 3w = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

の解を求めればよいが，これを解くと

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \text{ はパラメータ})$$

である．解空間の次元はパラメータの数なので $\dim W_2 = 2$ であり，基底は解を表す際に必要となるベクトルを持ってくれば良いので， $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ が W_2 の基底となる．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

11 月 8 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の行列 A に対して、(1) 線形写像 T_A の階数と退化次元、(2) 部分空間 $\text{Im } T_A$ の基底を一組、それぞれ求めよ。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

解) まず A を簡約化する。

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 2 & -1 & -7 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & -3 & -15 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -5 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) 線形写像 T_A の階数 $\text{rank } T_A$ は A を簡約化したものの主成分の数に等しいので、 $\text{rank } T_A = 3$ 。また T_A の退化次元は、次元公式より

$$\text{null } T_A = \dim U - \text{rank } T_A = 4 - 3 = 1$$

であるので、 $\text{null } T_A = 1$ 。

(2) T_A においては $\text{Im } T_A$ は A の列ベクトルから生成される部分空間であるので、主成分に対応する列ベクトルが基底となる。よって、 $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ を選べば良い。

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください。

線形代数学・同演習 B

11 月 15 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$U = \mathbb{R}[x]_2$, $V = \mathbb{R}[x]_1$ とし, 線形写像 $T: U \rightarrow V$ を

$$T(p(x)) = p'(x) + p(0)x$$

により定義する. このとき, 次の U, V のそれぞれの基底に関する T の表現行列 B を求めよ.

$$U: [-x^2 + 2x + 2, 8x^2 - 2x - 5, -5x^2 + 5x + 6] \quad V: [2x + 5, x + 3]$$

解) まず, 基底の変換行列を求める.

$$\begin{aligned} [-x^2 + 2x + 2, 8x^2 - 2x - 5, -5x^2 + 5x + 6] &= [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ [2x + 5, x + 3] &= [x, 1] \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるので, (講義中の記号を使えば)

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

である. 基底 $[x^2, x, 1]$ および $[x, 1]$ に関する表現行列は $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ であったので (例題 6.3), 定理 6.4 より

$$\begin{aligned} B &= Q^{-1}AP = \frac{1}{6-5} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & -5 \\ 2 & -2 & 5 \\ 2 & -5 & 6 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 11 & -4 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 35 & -17 \\ 4 & -59 & 30 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, $B = \begin{pmatrix} -2 & 35 & -17 \\ 4 & -59 & 30 \end{pmatrix}$ となる.

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください.

線形代数学・同演習 B

11 月 22 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の行列 A の固有値と，対応する固有空間を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

解) まず A の固有多項式 $g_A(t)$ を求める．

$$\begin{aligned} g_A(t) &= \det(tE_3 - A) = \det \left\{ \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 6 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right\} = \begin{vmatrix} t+5 & 0 & -6 \\ -6 & t-1 & 6 \\ 3 & 0 & t-4 \end{vmatrix} \\ &= (t-1) \begin{vmatrix} t+5 & -6 \\ 3 & t-4 \end{vmatrix} = (t-1)((t+5)(t-4) + 18) = (t-1)(t^2 + t - 2). \end{aligned}$$

ここで，第 2 列に関する余因子展開を利用した．よって， $g_A(t) = (t-1)^2(t+2)$ である．固有値は $g_A(t) = 0$ の解であるため， A の固有値は $\lambda = 1, -2$ となる．

(i) $\lambda = 1$ に対する固有空間

連立一次方程式 $(1 \cdot E_3 - A)x = 0$ の解を求めればよい．係数行列 $1 \cdot E_3 - A$ を簡約化すれば，

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -6 \\ -6 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．次元公式より，解のパラメータの個数 $= 3 - 1 = 2$ 個である¹⁾．主成分がない列に関する変数 ($x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$) とすれば， y と z をパラメータとすれば，この方程式の解は

$$x - z = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ および $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，固有空間は固有ベクトルで生成される空間であるので，

$$W(1; A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる．

¹⁾ 間違えている人が多かったので，赤字で書いています．

(ii) $\lambda = -2$ に対する固有空間

連立一次方程式 $(-2E_3 - A)x = 0$ の解を求めればよい．係数行列 $-2E_3 - A$ を簡約化すれば，

$$-2E_3 - A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ -6 & -3 & 6 \\ 3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である．パラメータの数は $3 - 2 = 1$ 個で，主成分がない列に関する変数 z をパラメータと思えば，この方程式の解は

$$\begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となるので，固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ であり，固有空間は

$$W(-2; A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる．

以上より， A の固有値は $\lambda = 1, -2$ であり，それぞれに対応する固有空間は

$$W(1; A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \quad W(-2; A) = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

となる．

線形代数学・同演習 B

12 月 13 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$V = \mathbb{R}[x]_2$ 上の線形変換 T を, $T(p(x)) := p(-x + 1)$ により定める.

(1) 線形変換 T の固有多項式 $g_T(t)$ を求めよ.

(2) 線形変換 T の固有値と, 対応する固有ベクトル (固有空間) を求めよ.

解) まずは表現行列を求める. 基底は標準基底 $[x^2, x, 1]$ を選ぶ.

$$\begin{aligned} T(x^2) &= (-x + 1)^2 = x^2 - 2x + 1 = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ T(x) &= -x + 1 = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ T(1) &= 1 = [x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, 標準基底に関する表現行列は $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ となる.

(1) $g_T(t) = g_A(t)$ であったので,

$$g_T(t) = g_A(t) = \det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & 0 \\ 2 & t+1 & 0 \\ -1 & -1 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t+1).$$

よって, $g_T(t) = (t-1)^2(t+1)$ である. □

(2) T の固有値は $g_T(t) = 0$ の解なので, $\lambda = 1, -1$ である.

(i) $\lambda = 1$ のとき. まずは表現行列 A の固有ベクトルを求める. それは斉次の連立一次方程式 $(E_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解なので, これを解く:

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば $x + y = 0$, z : 任意, なので, この方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる. これより, 表現行列 A の固有ベクトルは $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ である. 今求めたいのは線形変換 T の固有ベクトルであるので, 基底 $[x^2, x, 1]$ を付けて V の元に戻す必要がある. よって, T の固有値 $\lambda = 1$ に対する固有ベクトルは $[x^2, x, 1] \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = x - x^2$, $[x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$ であり, 固有空間は $W(1; T) = \text{Span}(x - x^2, 1)$ となる.

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください.

(ii) $\lambda = -1$ のとき . 同じく A の固有ベクトルから求める .

$$-E_3 - A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

方程式に戻せば , $x = 0, y + 2z = 0$, なので , 方程式の解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる . これより , 表現行列 A の $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ である . これを V の元に戻せばよいので , T の $\lambda = -1$ に対する固有ベクトルは $[x^2, x, 1] \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -2x + 1$ であり , 固有空間は $W(-1; T) = \text{Span}(-2x + 1)$ となる .

以上より , 線形変換 T の固有値は $\lambda = 1, -1$ であり , その固有空間は

$$W(1; T) = \text{Span}(x - x^2, 1), \quad W(-1; T) = \text{Span}(-2x + 1)$$

である .

□

線形代数学・同演習 B

12 月 20 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の行列は対角化可能か．可能ならば対角化せよ．(裏面も使用してよい．)

$$(1) A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 6 & 9 & -2 \end{pmatrix} \quad (2) B = \begin{pmatrix} 5 & 12 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix}$$

解) (1) まず固有多項式および固有値を求める．

$$\det(tE_3 - A) = \begin{vmatrix} t-4 & -9 & 0 \\ 1 & t+2 & 0 \\ -6 & -9 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2) \begin{vmatrix} t-4 & -9 \\ 1 & t+2 \end{vmatrix} = (t+2)(t-1)^2.$$

よって固有多項式は $(t+2)(t-1)^2$ で，固有値は $\lambda = \begin{cases} 1 & (\text{重複度 } 2) \\ -2 \end{cases}$ である．

(i) $\lambda = 1$ の固有空間 (固有ベクトル) を求める． $(1 \cdot E_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解を求めればよい．
係数行列 $1 \cdot E_3 - A$ を簡約化すれば，

$$E_3 - A = \begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -6 & -9 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので，解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ となる (s はパラメータ)．特にパラメータの数 ($= \dim W(1; A)$) を見ると $\dim W(1; A) = 1 \not\geq 2$ (固有値 1 の重複度) であるので，行列 A は対角化できない．
($\lambda = 1$ の結果に関わらず対角化できないことがわかったことになるので，その場合の計算は必要がない)

(2) まず固有多項式および固有値を求める．

$$\det(tE_3 - B) = \begin{vmatrix} t-5 & -12 & -6 \\ 0 & t+1 & 0 \\ 3 & 6 & t+4 \end{vmatrix} = (t+1) \begin{vmatrix} t-5 & -6 \\ 3 & t+4 \end{vmatrix} = (t+1)^2(t-2).$$

よって固有多項式は $g_B(t) = (t+1)^2(t-2)$ で，固有値は $\lambda = \begin{cases} -1 & (\text{重複度 } 2) \\ 2 \end{cases}$ である．

(次ページへ)

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

(i) $\lambda = 1$ の固有空間 (固有ベクトル) を求める . $(-1 \cdot E_3 - B) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解を求めればよい . 係数行列 $-1 \cdot E_3 - B$ を簡約化すれば ,

$$-1 \cdot E_3 - B = \begin{pmatrix} -6 & -12 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので , 解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる (s, t はパラメータ) . 特にパラメータの数を見ると $\dim W(-1; B) = 2$ である .

(ii) $\lambda = 2$ の固有空間 (固有ベクトル) を求める . $(2 \cdot E_3 - B) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \mathbf{0}$ の解を求めればよい . 係数行列 $2 \cdot E_3 - B$ を簡約化すれば

$$2 \cdot E_3 - B = \begin{pmatrix} -3 & -12 & -6 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

なので , 解は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ となる (s はパラメータ) . 特にパラメータの数は $\dim W(2; B) = 1$ である .

以上より , $\dim W(-1; B) + \dim W(2; B) = 2 + 1 = 3$ であるので , B は対角化可能であり ,

(i),(ii) の計算より , $P = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ とすれば , $P^{-1}BP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ となる .

線形代数学・同演習 B

1 月 10 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

$V = \mathbb{R}[x]_2$ とする．二つの多項式 $p(x) = x^2$, $q(x) = x$ と直交する (零多項式ではない) 多項式 $f(x)$ を一つ求めよ．ただし, V の内積は次で与えられているとする：

$$(f|g) := \int_{-1}^1 f(x)g(x) dx \quad (f, g \in V).$$

解) $f(x) = ax^2 + bx + c$ とおく．条件は $(f|p) = 0$ かつ $(f|q) = 0$ なので,

$$\begin{aligned} 0 = (f|p) &= \int_{-1}^1 (ax^4 + bx^3 + cx^2) dx = \frac{2}{5}a + \frac{2}{3}c, \\ 0 = (f|q) &= \int_{-1}^1 (ax^3 + bx^2 + cx) dx = \frac{2}{3}b. \end{aligned}$$

これより $c = -\frac{3}{5}a$, $b = 0$ となるので $f(x) = ax^2 - \frac{3}{5}a$ ($a \neq 0$) ならばよい．よって例えば $a = 5$ として

$$f(x) = 5x^2 - 3. \quad \square$$

講義や講義内容に関して, 意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

1 月 17 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

次の \mathbb{R}^3 の基底を Gram-Schmidt の直交化法を用いて直交化せよ．

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

解)

$$(1) \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|\mathbf{v}_1\|} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(2) まず $\mathbf{v}'_2 = \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_2 | \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1$ を計算する．

$$\mathbf{v}'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{よって } \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|\mathbf{v}'_2\|} \mathbf{v}'_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(3) まず $\mathbf{v}'_3 = \mathbf{v}_3 - (\mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - (\mathbf{v}_3 | \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2$ を計算する．

$$\begin{aligned} \mathbf{v}'_3 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 2 \cdot 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{18}(1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 + 3 - 1 \\ 0 + 0 - 4 \\ -12 + 3 + 1 \end{pmatrix} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\text{よって } \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|\mathbf{v}'_3\|} \mathbf{v}'_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

以上より，以下の $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ が求める正規直交基底である．

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

1 月 24 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ が正定値であることを示せ．

解) 対称行列が正定値とはその固有値がすべて正であることなので，まず固有値を求める．

$$\begin{aligned} g_A(t) &= \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t-4 & -1 & -1 \\ t-4 & t-2 & -1 \\ t-4 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & t-2 & -1 \\ 1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} \\ &= (t-4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-4)(t-1)^2. \end{aligned}$$

これより A の固有値は $1, 4$ であり，これらはいずれも正の数であるので， A は正定値である．

講義や講義内容に関して，意見・感想・質問等を自由に記述してください．

線形代数学・同演習 B

1 月 31 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

実対称行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ を直交行列により対角化せよ。ただし、 A の固有値が $4, 1$ (重

複度 2) であることは既知としてよい。また、裏面を使用してもよい。

解) 講義中に説明した手順に従って計算していく。

① 固有多項式を計算し、固有値を求める。今の場合は固有値は $4, 1$ (重複度 2)。求め方は 1 月 24 日分の小テストの解答を参照ください。

② 固有ベクトルを求める。

$\lambda = 1$ のとき。

$$1 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば $x + y + z = 0$ 。パラメータの数は $3 - 1 = 2$ 個。それを s, t とし、 $y = s$, $z = t$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s - t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって $\lambda = 1$ に対応する固有ベクトルは $v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

$\lambda = 4$ のとき。

$$4 \cdot E_3 - A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{簡約化}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

方程式に戻せば $\begin{cases} x - z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ であり、パラメータの数は $3 - 2 = 1$ 個。それを u とし、 $z = u$ とすれば

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ u \\ u \end{pmatrix} = u \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

よって固有値 $\lambda = 4$ に対応する固有ベクトルは $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 。

講義や講義内容に関して、意見・感想・質問等を自由に記述してください。

③ v_1, v_2, v_3 を直交化する．(異なる固有空間に入っているベクトルは必ず直交しているので，実質的には v_1, v_2 を正規直交化すればよい．)

$$(i) \mathbf{u}_1 = \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) まず $v'_2 = v_2 - (v_2 | \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1$ を計算する．

$$v'_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}(0 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1) \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので， $\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\|v'_2\|} v'_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ．

(iii) $v'_3 = v_3 - (v_3 | \mathbf{u}_1) \mathbf{u}_1 - (v_3 | \mathbf{u}_2) \mathbf{u}_2$ であるが，今 v_3 と $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ は異なる固有空間に属するベクトルであるので，直交している．よって $v'_3 = v_3$ である．これより

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\|v'_3\|} v'_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

以上より次の $ufrm[o]--$, $\mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$ が正規直交基底となることが分かる．

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

したがって，対称行列 A は直交行列

$$P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

により

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

と対角化できる．