

# 線形代数学・同演習 B

10 月 4 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1. (1)  $\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  (2)  $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} -54 \\ -26 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  <sup>\*2</sup>

2. (1)  $-1$  (2)  $-12$  (3)  $223$

3. 略.

4. (1)  $\times$  (2)  $\circ$  (3)  $\circ$  (4)  $\times$

5. (1)  $\times$  (2)  $\circ$

6.<sup>†</sup>  $\Rightarrow$  は明らか ( $W$  はベクトル空間であり, 条件 (i) ~ (iii) はベクトル空間になるための条件に含まれるので).

( $\Leftarrow$ ) 確認することは教科書 p.63 の脚注にある条件であるが, 今考えている和とスカラー倍はベクトル空間  $V$  のものなので, それらは  $V$  の元として成り立つことは明らか. よってそれらの演算が  $W$  からはみ出ないことを示せばよいが, 条件 (i) ~ (iii) より, それらはすべて  $W$  の元として成立することが分かる. よって,  $W$  は  $V$  の和とスカラー倍によりベクトル空間となるため,  $V$  の部分空間である.

7.<sup>†</sup> (1) 命題 1.9 の三条件を確認すれば良い.  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ ,  $u, v \in W_1 \cap W_2$  とする. このとき  $u, v \in W_1$  かつ  $u, v \in W_2$  である.  $i = 1, 2$  に対して  $W_i$  は  $V$  の部分空間なので,  $0 \in W_i$  かつ  $\lambda u + \mu v \in W_i$  である. したがって,  $0 \in W_1 \cap W_2$  かつ  $\lambda u + \mu v \in W_1 \cap W_2$  なのでこれは部分空間.

(2) (1) と同様に  $0 = 0 + 0 \in W_1 + W_2$  である. また,  $u_1 + u_2, v_1 + v_2 \in W_1 + W_2$  ( $u_i, v_i \in W_i$ ) とすれば,

$$\lambda(u_1 + u_2) + \mu(v_1 + v_2) = (\lambda u_1 + \mu v_1) + (\lambda u_2 + \mu v_2)$$

であり,  $W_1, W_2$  は部分空間なので,  $W_1 + W_2$  も部分空間となる.

(3) 部分空間にならない. 例えば,  $V = \mathbb{R}^2$  とし,  $W_1 = \{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} ; x \in \mathbb{R} \}$ ,  $W_2 = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} ; y \in \mathbb{R} \}$  とすれば明らかに  $W_1, W_2$  は部分空間であり,  $W_1 \cup W_2 = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} ; x = 0 \text{ 又は } y = 0 \}$  となる. しかしながら,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in W_1$ ,  $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_2$  であるが,  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \notin W_1 \cup W_2$  である.

8.\* 部分空間になるのは (1), (2) で, ならないのは (3), (4) である.

9.\* (1)  $O \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  は明らかで,  $X, Y \in \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R})$  のとき,

$${}^t(\lambda X + \mu Y)J + J(\lambda X + \mu Y) = \lambda({}^tXJ + JX) + \mu({}^tYJ + JY) = O$$

であることより.

(2)  $X = \begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ Y_2 & -{}^tX_1 \end{pmatrix}$ , ただし  $X_1$  は任意の  $n$  次正方行列であり,  $Y_1, Y_2$  は任意の  $n$  次対称行列.

(求め方は,  $X = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{pmatrix}$  と置いて,  ${}^tXJ + JX = O$  をブロック行列として計算する.)

<sup>\*1</sup> 凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題.

<sup>\*2</sup> 修正前は解なしとしていました. これは問題作成段階において, 1 番目の等式の  $z$  の係数の符号を間違えたためです. 失礼いたしました.

# 線形代数学・同演習 B

10 月 18 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

- 1.<sup>†</sup> (1)  $\bigcirc$  (2)  $\times$  (3)  $\times$  (4)  $\bigcirc$
2. (1) 線形独立 (2) 線形独立でない
3. (1) 線形独立 (2) 線形独立でない
4. (1)  $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$  より . (2)  $x^3 = (x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 3(x+1) - 1$ .
- 5.<sup>†</sup> (1)  $r = 3$ , 例えば  $u_1, u_2, u_3$ , (2)  $r = 2$ , 例えば  $v_1, v_2$ , (3)  $r = 3$ , 例えば  $p_1(x), p_2(x), p_4(x)$ .
- 6.<sup>†</sup> (1) 正しい . 問題 3 と同様にできる . ただし , 誤植があり , 正しくは  $v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_1 - 3v_2 + 2v_3$  である . (2) 誤り .  $n$  が偶数のときは線形従属 . 例えば  $n = 2$  だと二本のベクトルが同じものになる .
- 7.<sup>\*</sup> (1)  $P_0(x) = 1, P_1(x) = x, P_2(x) = (3x^2 - 1)/2$ , (2) 問題 3 あるいは問題 4 (1) と同様 .

---

<sup>\*1</sup> 凡例 : 無印は基本問題 , <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題 , <sup>\*</sup> は応用問題 .

・10月18日分 大問1の解説．

集合の扱いに関して説明が不十分だったようなので，ここで補足しておきます．

まず， $W = \{x \in V; x \text{ に関する条件} \}$  と書けば，これは“その条件をみたすような  $V$  の要素全体からなる集合”を表します．

例1.  $W_1 = \{n \in \mathbb{Z}; n \text{ は偶数} \}$  とすれば， $W$  は偶数からなる集合．

例2.  $W_2 = \{m \in \mathbb{Z}; |m| < 10\}$  とすれば，これは絶対値が10未満の整数の集合，つまり  $\{0, \pm 1, \dots, \pm 10\}$  を表す．

これらの例において，‘ $n \in \mathbb{Z}$ ’ や ‘ $m \in \mathbb{Z}$ ’ と書いていますが，この  $n$  や  $m$  という記号は，いわゆるダミー変数で，条件を記述するために用意するものです．例えば  $W_2$  なら， $W_2 = \{ \text{整数のうち，絶対値が10未満のもののなす集合} \}$  と書いてもいいわけですが，数式を用いるほうが直感的にわかりやすいので，このような表記を用いています．

(1)  $W_1 = \{(y, ay); y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$  ( $a$  は定数)

$(x, ax), (y, ay) \in W_1$  とする<sup>\*2</sup>．このとき，この二つの要素の線形結合は

$$\lambda(x, ax) + \mu(y, ay) = (\lambda x + \mu y, a(\lambda x + \mu y)) \in W_1.$$

また，明らかに  $(0, 0) \in W_1$  なので， $W_1$  は  $\mathbb{R}^2$  の部分空間になる．

(2)  $W_2 = \{(x, x^2); x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$

$(x, x^2), (y, y^2) \in W_2$  とすると，この二つの要素の和は

$$(x, x^2) + (y, y^2) = (x + y, x^2 + y^2)$$

であるが，これは  $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2$  であるので， $W_2$  の要素にはなれない．つまり， $W_2$  は  $\mathbb{R}^2$  の部分空間ではない．

(3)  $W_3 = \{f \in C(\mathbb{R}); f(x) + f(x)^2 = 0\}$

$f, g \in W_3$  とする．つまり， $f(x) + f(x)^2 = 0, g(x) + g(x)^2 = 0$  を満たすとする．このとき， $f + g$  について考えると，

$$(f(x) + g(x)) + (f(x) + g(x))^2 = (f(x) + f(x)^2) + (g(x) + g(x)^2) + 2f(x)g(x) = 2f(x)g(x).$$

ここで，例えば  $f_1(x) = -1$  ( $\forall x$ ) とすれば， $f_1(x) + f_1(x)^2 = 0$  であるので  $f_1 \in W_3$  となるが，上式において  $f = f_1, g = g_1$  としてみれば  $f + g = 2f_1^2 = 2 \neq 0$  となるため， $f + g$  は  $W_3$  の要素にはなれない．よって  $W_3$  は  $C(\mathbb{R})$  の部分空間ではない．(実は  $W_3 = \{f_0(\text{零関数}), f_1\}$  である．)

(4)\*  $W_4 = \{g \in C(\mathbb{R}); \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty\}$

$f, g \in W_4$  とする．つまり， $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty, \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$  である．このとき，絶対値の三角不等式より  $|\lambda f(x) + \mu g(x)| \leq |\lambda| |f(x)| + |\mu| |g(x)|$  が成り立つので，

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda f(x) + \mu g(x)| dx \leq \int_{-\infty}^{\infty} (|\lambda| |f(x)| + |\mu| |g(x)|) dx = |\lambda| \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx + |\mu| \int_{-\infty}^{\infty} |g(x)| dx < \infty$$

となる．また，明らかに  $\int_{-\infty}^{\infty} |f_0(x)| dx = 0 < \infty$  なので  $W_4$  は零元  $f_0$  も持つ．よって  $W_4$  は  $C(\mathbb{R})$  の部分空間になる．

---

<sup>\*2</sup>  $W_1$  の定義式の  $y$  はダミー変数なので，実際に  $W_1$  の要素を持ってくるときは  $y$  でなくてもよい．

# 線形代数学・同演習 B

10 月 25 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1.  $r = 2$  である．例えば  $a_1, a_2$  が線形独立で， $a_3 = -3a_1 + a_2, a_4 = 3a_1 + a_2, a_5 = -3a_1$  となる．与えられた行列の簡約化は

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. 右辺の行列が正則かどうかを調べればよい．方法は簡約化なり行列式なりやりやすい方であれば良い．

(1)  $\bigcirc$  (2)  $\times$

3. (1) 略．(2)  $\dim V = 3$  (自由に動けるパラメータは 3 つなので)．自然な基底は  $x, y, 1$ ．(3)  $f_1(x, y) = -x - y + 1, f_2(x, y) = x, f_3(x, y) = y$  とすればよい．

- 4.<sup>†</sup> (1)  $r = 3$  である．例えば  $p_1(x), p_2(x), p_4(x)$  が線形独立で， $p_3(x) = -p_1(x) + p_2(x), p_5(x) = 3p_1(x) + p_4(x)$  である．

(2)  $r = 3$  である．例えば  $q_1(x), q_2(x), q_5(x)$  が線形独立で， $q_3(x) = q_1(x) + q_2(x), q_4(x) = -q_1(x) + 2q_2(x)$  である．

- 5.<sup>†</sup> (1)  $\text{Sym}(n, \mathbb{R})$  は  $n$  次正方形のなすベクトル空間の部分集合であるため， $O \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  ( $O$  は零行列) および  $X, Y \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  のとき  $\lambda X + \mu Y \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$  となることを示すだけでよい．(2)  $\dim \text{Sym}(n, \mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$ ．

- 6.<sup>†</sup> (1)  $\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} a-b \\ b-c \\ c \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 41a-14b+6c \\ -14a+5b-2c \\ 6a-2b+c \end{pmatrix}$

- 7.\* (1) ベクトル空間になるための条件 (教科書 p.63 の脚注) は，考えている空間が複素数なので当然全て成り立つ．ただし，(4)-(6) の  $a, b$  は実数だけを考えていることに注意．任意の複素数は  $x + yi$  ( $i$  は虚数単位) と書けるので  $\dim \mathbb{C} = 2$ ．

(2)  $\mathbb{R}$  が  $\mathbb{Q}$  上のベクトル空間になることも (1) と同様である．その次元が無限次元になることは，背理法によって示せる．仮に有限次元になると仮定すると，ある自然数  $n$  に対して  $1, \pi, \pi^2, \dots, \pi^n$  が線形従属になってしまうが，それはある多項式に関して

$$a_0 + a_1\pi + a_2\pi^2 + \dots + a_n\pi^n = 0 \quad (a_j \in \mathbb{Q})$$

となることを意味する．これは  $\pi$  の超越性に反する．よって， $\mathbb{R}$  は “ $\mathbb{Q}$  上の” ベクトル空間としては無限次元でなければならない．

<sup>\*1</sup> 凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題．

# 線形代数学・同演習 B

11 月 1 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1. 略.
2. (1) 次元は 3, 基底は例えば  $a_1, a_2, a_4$ . (2) 次元は 2, 基底は例えば  $b_1, b_3$ .
- 3.<sup>†</sup> (1) 次元は 2, 基底は例えば  $f_1(x)$  と  $f_2(x)$  (2) 次元は 3, 基底は例えば  $g_1(x), g_2(x)$  と  $g_4(x)$  (3) 次元は 4 (よって問題 7 より  $\mathbb{R}[x]_3$  と一致する), 基底は例えば  $H_0(x), \dots, H_3(x)$ , あるいは  $1, x, x^2, x^3$  でもよい.  
多項式の標準基底  $[1, x, x^2, x^3]$  (あるいは  $[x^3, x^2, x, 1]$ ) に関してベクトル表示をして, そのベクトルの組に対して問題 2 と同様の計算を行う. 基底も主成分に対応する列を持ってください. 考えている空間が多項式の空間なので, 基底も多項式に戻すことを忘れずに.
- 4.<sup>†</sup> (1) 次元は 1, 基底は例えば  $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ . (2) 次元は 2, 基底は例えば  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .
5. (1)  $\begin{pmatrix} 56 & -17 \\ -23 & 7 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 76 & -29 \\ -55 & 21 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 13 & -4 & 16 \\ 6 & -1 & 8 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ ; 行列として  $(u)^{-1}(\tilde{u})$  を計算すればよい.
6.  $U$  の二つの基底をそれぞれ  $[u_1, \dots, u_n]$  と  $[\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n]$  とし, 基底の変換行列を  $P = (p_1, \dots, p_n)$  とおく. このとき  $[\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n] = [u_1, \dots, u_n]P$  である. さて,  $p_1, \dots, p_n$  の線形独立性を調べるので,  $a_1 p_1 + \dots + a_n p_n = 0$  とおく. このとき,

$$0 = [u] \sum_{i=1}^n a_i p_i = [u_1, \dots, u_n] P \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = [\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n] \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = a_1 \tilde{u}_1 + \dots + a_n \tilde{u}_n.$$

ここで  $\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n$  は線形独立なので,  $a_1 = \dots = a_n = 0$  でなければならない. よって,  $p_1, \dots, p_n$  は線形独立となる.

- 7.<sup>†</sup> (1)  $m = \dim W$  とおき,  $v_1, \dots, v_m$  をその基底とする. すると, これらは  $V$  においても線形独立である.  $\dim V$  は  $V$  から取り出せる線形独立なベクトルの最大個数だったので,  $\dim V \geq m = \dim W$  となる.  
(2)  $\Leftarrow$  は明らかなので,  $\Rightarrow$  を示す. まず明らかに  $W \subset V$  である. (1) と同様に  $v_1, \dots, v_m$  を  $W$  の基底とする.  $\dim V = m$  であるので,  $V$  の元は  $m$  個の線形独立なベクトルの線形結合で表すことができるが, そのベクトルとして  $v_1, \dots, v_m$  を選べば,  $V$  の任意の元は  $W$  の元  $v_1, \dots, v_m$  の線形結合で書けることになる. つまり  $V \subset W$  となるので,  $W = V$  である.
- 8.\* (1)  $\{a_n\}_{n=0}^\infty, \{b_n\}_{n=0}^\infty \in V$  のとき,

$$a_{k+3} + b_{k+3} = (7a_{k+1} + 6a_k) + (7b_{k+1} + 6b_k) = 7(a_{k+1} + b_{k+1}) + 6(a_k + b_k)$$

などより, ベクトル空間となる. また, 次元は 3 となる (自由に動けるパラメータは  $x_0, x_1, x_2$  の 3 つだけなので). (2) (1) より, 条件となっている漸化式を満たすものを 3 つ持ってくればよいが, この漸化式の特徴方程式  $x^3 = 7x + 6$  の解である  $\lambda = 3, -1, -2$  は  $\lambda^{k+3} = 7\lambda^{k+1} + 6\lambda^k$  を満たすので,  $\{3^n\}_{n=0}^\infty, \{(-1)^n\}_{n=0}^\infty, \{(-2)^n\}_{n=0}^\infty$  はこのベクトル空間の基底となる.<sup>\*2</sup>

<sup>\*1</sup> 凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題.

<sup>\*2</sup> 特に一般項が  $x_n = 3^n a + (-1)^n b + (-2)^n c$  の形なので,  $x_0, x_1, x_2$  が与えられれば, 簡単な連立一次方程式を解い

# 線形代数学・同演習 B

11 月 8 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

- 1.<sup>†</sup> (1) 各  $j$  に対して  $v_j \in \text{Im } T$  であるので、その定義より  $U$  のある要素  $u_{r+j}$  で  $T(u_{r+j}) = v_j$  となるものが存在する。ここで、 $v_1, \dots, v_s$  は基底であるので、どれも  $0_V$  にはならない。つまり、 $T(u_{r+j}) \neq 0_V$  であるので、 $u_{r+j} \notin \text{Ker } T$  である。(2)  $u$  を  $U$  の任意の要素とする。まず、 $T(u)$  を考えると、これは  $\text{Im } T$  に属しているので、 $v_1, \dots, v_s$  の線形結合で表すことができる。つまり  $u = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$  と表すことができる。さて、ここで  $\tilde{u} := u - b_1 u_{r+1} - \dots - b_s u_{r+s}$  という  $U$  の要素を考える。これを  $T$  でうつすと、

$$T(\tilde{u}) = T(u) - (b_1 T(u_{r+1}) + \dots + b_s T(u_{r+s})) = 0_V$$

であるので、 $\tilde{u} \in \text{Ker } T$  となる。つまり、 $\tilde{u} = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$  と書くことができる。以上より、

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$$

となるので、 $U$  の任意の要素はこれらの線形結合で書ける。(3)  $u' = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r + b_1 u_{r+1} + \dots + b_s u_{r+s}$  とし、方程式  $u' = 0_U$  を考える。 $u_1, \dots, u_r$  は  $\text{Ker } T$  の基底であること、および線形写像は零元を零元にうつすことより、

$$0_V = T(u') = b_1 T(u_{r+1}) + \dots + b_s T(u_{r+s}) = b_1 v_1 + \dots + b_s v_s$$

であるが、 $v_1, \dots, v_s$  は  $\text{Im } T$  の基底なので、これを満たす  $(b_1, \dots, b_s)$  は  $(0, \dots, 0)$  しかありえない。よって  $u' = a_1 u_1 + \dots + a_r u_r$  であり特に  $u' \in \text{Ker } T$  であるが、今度は  $u_1, \dots, u_r$  が  $\text{Ker } T$  の基底であるため、 $a_1 = \dots = a_r = 0$  を得る。よって、 $u_1, \dots, u_{r+s}$  は線形独立となる。

- 2.<sup>†</sup> いずれの場合も  $T(0_U) = 0_V$  より、零元を持つことが分かる。また、 $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  としておく。(1)  $v_1, v_2 \in \text{Im } T$  とする。このとき、 $U$  のある要素  $u_1, u_2$  を用いて  $v_1 = T(u_1)$ ,  $v_2 = T(u_2)$  とかけるが、 $T(\lambda u_1 + \mu u_2) = \lambda v_1 + \mu v_2$  であるので、 $\lambda v_1 + \mu v_2 \in \text{Im } T$  となる。よって部分空間となる。(2)  $u, u' \in \text{Ker } T$  とすると、 $T(\lambda u + \mu u') = \lambda T(u) + \mu T(u') = 0_V$  であるので、 $\lambda u + \mu u' \in \text{Ker } T$ 、つまり部分空間となる。
3. 与えられた行列を簡約化すれば、それぞれ次のようになる。(1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (4)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  (5)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  (6)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  余白の都合で次ページへ。
4. (1)  $\bigcirc$  (2)  $\times$  (3)  $\bigcirc$  (4)  $\bigcirc$  (5)  $\bigcirc$  (6)  $\times$
- 5.<sup>†</sup> (1)  $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$  ( $p, q$  は多項式) とおいて、 $T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$  を満たすことを確認すればよい。(2) 退化次元は 1, 階数は 3 (3)  $1, x, x^2(-3, 3-2x, -3+6x-x^2$  でもよい)

---

て係数である  $a, b, c$  を求めることにより一般項を得ることができるようになっている。これは一般の (線形な) 漸化式でも、重解がなければ使える手法である。

<sup>\*1</sup> 凡例：無印は基本問題、<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題、<sup>\*</sup> は応用問題。

		(a)		(b)
(1)	1	$\begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}$
(2)	1	$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
(3)	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$
(4)	1	$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
(5)	2	$\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	2	$\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
(6)	2	$\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$	3	$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

# 線形代数学・同演習 B

11 月 15 日分 演習問題\*<sup>1</sup>

1. (1)  $\begin{pmatrix} -1 & -10 & -10 \\ -4 & -23 & -25 \end{pmatrix}$  (2)  $\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 15 & 0 & -7 \\ 23 & 4 & -11 \end{pmatrix}$
- 2.<sup>†</sup> (1)  $\begin{pmatrix} 21 & -8 & 12 \\ 10 & -3 & 6 \\ -25 & 10 & -14 \end{pmatrix}$  (2)  $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;  $P$  を基底ベクトルを並べた行列として,  $P^{-1}AP$  を計算.
- 3.<sup>†</sup> (1) 略 ( $h(x) = \lambda p(x) + \mu q(x)$  ( $p, q$  は多項式) において,  $T(h(x)) = \lambda T(p(x)) + \mu T(q(x))$  を満たすことを確認すればよい). (2)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  (3)  $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- 4.\* (1)( $\Rightarrow$ )  $V$  の基底を  $v_1, \dots, v_n$  とすれば,  $T$  の全射性からある  $u_j$  が存在してそれぞれ  $T(u_j) = v_j$  となるので  $\dim \text{Im } T \geq \dim V$ .  $\text{Im } T$  は  $V$  の部分空間なので  $\dim \text{Im } T \leq \dim V$  であるので  $\dim \text{Im } T = \dim V$ .  
 ( $\Leftarrow$ ) 部分空間の次元が全空間と一致しているならば, その部分空間は全空間と一致する (11 月 1 日の問題 7 (2)) ので,  $\text{Im } T = V$ .  
 (2)( $\Rightarrow$ ) 単射性より明らか.  
 ( $\Leftarrow$ )  $U$  の二元  $u, u'$  を任意にとる. このとき  $T(u) = T(u')$  とすると,  $T$  の線形性より
 
$$0_V = T(u) - T(u') = T(u - u').$$
 ここで  $\ker T = \{0_U\}$  であることより,  $u - u' = 0_U$ , つまり  $u = u'$  であるので,  $T$  は単射となる.  
 (3) 基底を一つ選び, そのときに現れる列ベクトルを対応させる線形写像により, 同型となる.

・以下は旧課程における大学入試問題です. 講義の記号に合わせて文章を変えています.

- 5.\*  $\det A = 1$  より (1)  $ad - bc = 1$  であり,  $\|x_1\| = \|x_2\| = 1$  より

$$(2) a^2 + c^2 = 1, \quad (3) (a^2 + bc)^2 + c^2(a + d)^2 = 1$$

が成り立つ. ここで (3) に式 (1), (2) を代入し, 式を整理すれば  $(a + d)(a - d) = 0$  を得る.

(i)  $a + d = 0$  のとき. このとき Cayley-Hamilton の定理より  $A^2 = -E$  であるので,

$$x_{2k+1} = (-1)^k x_1, \quad x_{2k} = (-1)^k e_1$$

となるため, いずれの場合も  $\|x_n\| = 1$ .

(ii)  $a - d = 0$  のとき. (1) より  $a^2 - bc = 1$  であり, これを (2) に代入すれば  $c(b + c) = 0$  を得る.  $c = 0$  ならば  $x_n = {}^t(a^n, 0)$  であり,  $\|x_1\| = |a| = 1$  なので  $\|x_n\| = |a|^n = 1$ .  $c \neq 0$  ならば  $b + c = 0$  なので, このとき  $A = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}$  ( $a^2 + c^2 = 1$ ) という形をしているので, これは回転行列

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

である. よって  $x_n = A^n e_1 = {}^t(\cos n\theta, \sin n\theta)$  となり,  $\|x_n\| = \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta = 1$ .

- 6.\* (1)  $A_n(E - C) = B(E - C^n)$ . (2)  $A_{3n} = \frac{1 - (-2)^{3n}}{3} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

\*<sup>1</sup> 凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題.

# 線形代数学・同演習 B

11 月 22 日分 演習問題\*<sup>1</sup>

1. 与えられた行列を  $A$  とおく．計算の仕方は，11 月 22 日分の小テストの解答を参考のこと．

$$(1) W(5, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(-3, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}\right)$$

$$(2) W(-1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(3) W(3, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(4) W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}\right), W(-1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

2.<sup>†</sup> 与えられた行列を  $A$  とおく．

$$(1) W(3, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(-2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(2) W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(0, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$(3) W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), W(-1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(4) W(3, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$(5) W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(6) W(-2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(7) W(3, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right), W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(-1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(8) W(-1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right), W(1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$$

$$(9) W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(-1, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

3.<sup>†</sup> 与えられた行列を  $A$  とおく．

$$(1) W(i, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(-i, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(2) W(1+i, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(1-i, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$(3) W(2, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}\right), W(0, A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

4. (1)  $t^3 - 21t - 68$ , (2)  $t^3 + 4t^2 - 4t - 21 = (t+3)(t^2+t-7)$ , (3)  $t^3 + 2t^2 - 7t - 48$ .

5.  $g_A(t) = \det(tE_3 - A)$  を地道に計算すればよい． $t$  についての次数比較を行うと楽．

6.<sup>†</sup>  $S = A + 2E_2$ ,  $T = (-A + 8E_2)/23$ .

$p(t) = 2t^2 - 12t^3 + 19t^2 - 29t + 37$  とおく． $g_A(t) = t^2 - 6t + 7$  であるが， $p(x) = (t^2 - 6t + 7)(5 + 2t^2) + (2 + t)$  であることより．また， $S$  に関しては  $S^2 - 10S + 23E_2 = O$  が成り立つので， $-23E_2 = S(S - 10E_2)$ ，つまり  $S^{-1} = -(S - 10E_2)/23 = (-A + 8E_2)/23$ .

7. 与えられた行列を  $A$  とかく．(1)  $A^{2k} = 5^k E_2$ ,  $A^{2k+1} = 5^k A$ , (2)  $A^n = 5^{n-1} A$  ( $n \geq 1$ ),  $A^0 = E_2$ , (3)  $A^n = 3^{n-1} \begin{pmatrix} 3-2n & 2n \\ -2n & 3+2n \end{pmatrix}$ , (4)  $A^n = f_n A + f_{n-1} E_2$  ( $n \geq 2$ ), ただし  $\{f_n\}$  はフィボナッチ数列．

(1),(2) はそのまま Cayley-Hamilton の定理より．(3),(4) は同定理より  $A^n = a_n A + b_n E_2$  と書けることを踏まえ， $A^{n+1} = a_n A^2 + b_n A$  において  $A^2 = \dots$  を代入し漸化式をたてる．

\*<sup>1</sup> 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，\* は応用問題．

# 線形代数学・同演習 B

12 月 13 日分 演習問題\*<sup>1</sup>

1. (1)  $W(1; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $W(-1; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$   
 (2)  $W(2; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ,  $W(-1; A) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

2.<sup>†</sup> (1)  $\bigcirc$  (2)  $\times$  (3)  $\bigcirc$  (4)  $\times$

(1)  $v, v' \in \text{Im}(T)$  とすると,  $\text{Im}(T)$  の定義より,  $v = T(u)$ ,  $v' = T(u')$  となる  $u, u' \in V$  が存在する. このとき,  $T$  の線形性から

$$T(u + u') = T(u) + T(u') = v + v', \quad T(\lambda u) = \lambda T(u) = \lambda v$$

なので,  $v + v' \in \text{Im}(T)$ ,  $\lambda v \in \text{Im}(T)$  である. また,  $0_V = T(0_V)$  であることより  $0_V \in \text{Im}(T)$  なので,  $\text{Im}(T)$  は  $V$  の部分空間となる.

(2)  $V$  の零元  $0_V$  は係数が全て 0 である多項式である. よって  $W_1$  に属するための条件「最高次の係数が 1」を満たさないため,  $W_1$  には零元が含まれない. つまり  $W_1$  は部分空間ではない.

(3)  $v, v' \in \text{Ker}(T)$  とすると, 定義より  $T(v) = 0_V$ ,  $T(v') = 0_V$  となる. このとき,  $T$  の線形性から

$$T(v + v') = T(v) + T(v') = 0_V, \quad T(\lambda v) = \lambda T(v) = 0_V$$

なので,  $v + v' \in \text{Ker}(T)$ ,  $\lambda v \in \text{Ker}(T)$  である. また,  $T(0_V) = 0_V$  であることより  $0_V \in \text{Ker}(T)$  なので,  $\text{Ker}(T)$  は  $V$  の部分空間となる.

(4)  $T(0_V) = 0_V \neq x$  であるため, 零元  $0_V$  は  $W_2$  に属するための条件を満たさない. つまり,  $W_2$  は部分空間ではない.

3. (1)  $g_{T_1}(t) = t(t-1)$ ,  $W(0; T_1) = \text{Span}(1)$ ,  $W(1; T_1) = \text{Span}(x)$   
 (2)  $g_{T_2}(t) = (t+1)(t-1)$ ,  $W(1; T_2) = \text{Span}(1+x)$ ,  $W(-1; T_2) = \text{Span}(1-x)$   
 (3)  $g_{T_3}(t) = (t-1/2)(t-2)$ ,  $W(1/2; T_3) = \text{Span}(x)$ ,  $W(2; T_2) = \text{Span}(1)$   
 4. (1) 固有値は  $1, a$  で, 対応する固有空間はそれぞれ  $\text{Span}(1)$ ,  $\text{Span}(x + \frac{b}{a-1})$   
 (2) 固有値は  $1, a, a^2$  で, 対応する固有空間はそれぞれ  $\text{Span}(1)$ ,  $\text{Span}(x + \frac{b}{a-1})$ ,  $\text{Span}((x + \frac{b}{a-1})^2)$   
 (3) 固有値は  $a^i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) で, 固有値  $a^i$  に対する固有空間は  $\text{Span}((x + \frac{b}{a-1})^i)$  となる.

- 5.<sup>†</sup> (1)  $W(1; T) = \text{Span}(-3x^2 - 5x + 1)$ ,  $W(-2; T) = \text{Span}(x)$ ,  
 $W(3; T) = \text{Span}(-2x^2 - 3x + 1)$ .  
 (2)  $W(1; T) = \text{Span}(-2x^2 + 3x + 1)$ ,  $W(-2; T) = \text{Span}(-x^2 + 2x + 1)$ ,  
 $W(4; T) = \text{Span}(-2x^2 + x)$ .  
 (3)  $W(1; T) = \text{Span}(x^2 + 5x, x^1 + 1)$ ,  $W(2; T) = \text{Span}(x^2 - x + 1)$ .

\*<sup>1</sup> 凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題.

6.†  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  とおく .  $PD = AP$  の各成分を比較する .

$$PD = \begin{pmatrix} \lambda a & \mu b \\ \lambda c & \mu d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix} = AP.$$

特に  $(2, 1)$  成分と  $(2, 2)$  成分より ,  $\lambda = \mu = 1$  でなければならないことが分かる . さらに  $(1, 1)$  成分と  $(1, 2)$  成分を見ると ,  $c = d = 0$  でなければならない . しかしこのとき  $P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  となるため , 正則行列にはなりえない . よって ,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  は対角化することができない .

7.\* (1)  $W_1 \ni w_1 = -w_2 \in W_2$  なので ,  $w_1, -w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$  , つまり  $w_1 = w_2 = 0$  となる .

(2)  $W_1 \ni w_1 - w'_1 = w'_2 - w_2 \in W_2$  なので (1) より  $w_1 - w'_1 = 0$  かつ  $w'_2 - w_2 = 0$  . つまり  $w_1 = w'_1$  かつ  $w_2 = w'_2$  となる .

# 線形代数学・同演習 B

12 月 20 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1. (1)  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , (2) 対角化できない,  
 (3)  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ , (4)  $D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 (5) 対角化できない, (6) 対角化できない,  
 (7)  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ , (8)  $D = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ .
2. (1)  $A^n = \begin{pmatrix} 2 - 3^n & -1 + 3^n \\ 2 - 2 \cdot 3^n & -1 + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$ , (2) 対角化できない,  
 (3)  $A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2((-1)^n + 2^n) \\ (-1)^n - 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} \end{pmatrix}$ , (4)  $A^n = \begin{pmatrix} (-1)^n + 2 \cdot 4^n & 2((-1)^n - 4^n) \\ (-1)^{n+1} + 4^n & 2(-1)^n - 4^n \end{pmatrix}$   
 (5) 対角化できない, (6) 対角化できない,  
 (7)  $\begin{pmatrix} 2(-2)^n - 3^n & (-2)^n - 3^n \\ (-2)^{n+1} + 2 \cdot 3^n & -(-2)^n + 2 \cdot 3^n \end{pmatrix}$ , (8)  $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} - (-5)^n & -2^n + (-5)^n \\ 2^{n+1} - 2(-5)^n & -2^n + 2(-5)^n \end{pmatrix}$ .
- 3.<sup>†</sup> (1)  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ , (2) 対角化できない,  
 (3)  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  
 (4)  $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  
 (5)  $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ , (6) 対角化できない.
4. (1) 行列のトレースの次の性質  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$  を用いる.  $A = PDP^{-1}$  ( $D$  は対角行列で,  $\lambda_1$  が  $m_1$  個,  $\dots$   $\lambda_r$  が  $m_r$  個並んでいるもの) と書けるが,

$$\text{tr}A = \text{tr}(PDP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PD) = \text{tr}(D)$$

となることより.

(2) これも  $\det(AB) = \det(BA)$  となることを用いれば, (1) と同様に示すことができる.

<sup>\*1</sup> 凡例: 無印は基本問題, † は特に解いてほしい問題, \* は応用問題.

5. これも  $\det(XY) = \det(YX)$  を用いる .

$$\begin{aligned} g_{AB}(t) &= \det(tE - AB) = \det(A(tA^{-1} - B)) \\ &= \det((tA^{-1} - B)A) = \det(tE - BA) = g_{BA}(t). \quad \square \end{aligned}$$

6.†  $A$  の固有多項式は  $g_A(t) = t^2 - t - 1$  .  $g_A(t) = 0$  の 2 解を  $\alpha, \beta$  とする . ただし  $\alpha > \beta$  とする .  $\alpha, \beta$  は  $A$  の固有値であるが , 対応する固有ベクトルはそれぞれ  $\begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta \\ 1 \end{pmatrix}$  となる . そこで  $P = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  とおけば ,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{pmatrix}$$

となる . これより

$$A^n = P \begin{pmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{pmatrix} P^{-1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{pmatrix}$$

となる . さて ,  $\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = A^{n-1} \begin{pmatrix} f_2 \\ f_1 \end{pmatrix}$  であることより ,

$$\begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \\ \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} & \alpha^{n-2} - \beta^{n-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n \end{pmatrix}$$

となるので , 結局  $f_n$  は以下のようになる :

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

なお , 以上の変形では  $\alpha\beta = -1$  や  $\alpha^2 = \alpha + 1$  などのような関係式を用いている .

7.\*  $n_i = \dim W(\lambda_i; T)$  とし ,  $W(\lambda_i; T)$  の基底を  $[u_1^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}]$  とする . 次のベクトルの組が線形独立であればよい :

$$[u_1^{(1)}, \dots, u_{n_1}^{(1)}, u_{n_2}^{(2)}, \dots, u_1^{(r)}, \dots, u_{n_r}^{(r)}]. \quad (1)$$

線形独立かどうかを確かめるために , 上のベクトルの組の線形結合を考える :

$$a_1^{(1)} u_1^{(1)} + \dots + a_{n_1}^{(1)} u_{n_1}^{(1)} + a_1^{(2)} u_{n_2}^{(2)} + \dots + a_1^{(r)} u_1^{(r)} + \dots + a_{n_r}^{(r)} u_{n_r}^{(r)} = \mathbf{0}.$$

簡単のため  $w^{(i)} = a_1^{(i)} u_1^{(i)} + \dots + a_{n_i}^{(i)} u_{n_i}^{(i)}$  とおけば , 上式は

$$w^{(1)} + \dots + w^{(r)} = \mathbf{0} \quad (2)$$

となる . ここで講義中の補題 9.1 より各固有空間同士の共通部分は  $\{0\}$  のみである . したがって同じく講義中の補題 9.2 を適用することができて , 式 (2) より各  $i$  に対して

$$\mathbf{0} = w^{(i)} = a_1^{(i)} u_1^{(i)} + \dots + a_{n_i}^{(i)} u_{n_i}^{(i)}$$

となる . ここで  $[u_1^{(i)}, \dots, u_{n_i}^{(i)}]$  は  $W(\lambda_i; T)$  の基底であるので , 上式を満たす  $a_1^{(i)}, \dots, a_{n_i}^{(i)}$  は ‘すべて 0’ しかありえない . よって , 式 (1) のベクトルの組は線形独立であることが示された . 次元とはその空間における線形独立なベクトルの最大個数であったため , 少なくとも  $n_1 + \dots + n_r = \sum_{i=1}^r \dim W(\lambda_i; T)$  以上であることがわかる .

# 線形代数学・同演習 B

1 月 10 日分 演習問題\*<sup>1</sup>

数ベクトル  $\mathbb{R}^n$  の内積は標準内積により与えられているとする．また，多項式空間の内積は，特に断らない限り  $(p|q) = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx$  により与えられているとする．

1. (1)  $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ , (2)  $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$ , (3)  $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

2.<sup>†</sup> 与えられた二つの多項式と直交する多項式を  $f(x)$  で表す．

(1)  $f(x) = x$ , (2)  $f(x) = 3x^2 - 1$ , (3)  $f(x) = 5x^2 - 2x - 3$ , (4)  $f(x) = 5x^2 - 12x + 1$ .

3.  $A = (a_{ij})$ ,  $B = (b_{ij})$  と書けば  $(A|B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ij}$  となるので，あとは簡単な計算により確認することができる．

4. 内積の性質を満たすことは，例題と全く同様に示すことができる．後半は，例えば  $p(x) = x$ ,  $q(x) = x^2$  とすれば， $(p|q) = 0$  であるのに対して， $(p|q)_0 = 1/4$  であることなどから確認できる．

5.<sup>†</sup> ならない．例えば  $f(x) = \begin{cases} 1 & (x=0) \\ 0 & (x \neq 0) \end{cases}$  とすると  $f \neq 0$  (零関数) であるが， $(f|f) = 0$  となってしまう．

解説) 内積の条件のうち (1)-(3) までは一般の関数空間でも成立するが，条件 (4) も成立するためには“連続性”が必要である．さて，連続関数の空間は条件 (4) を満たすことの証明を，厳密にやってみよう．条件 (4) は  $v \neq 0_V$  ならば  $(v|v) > 0$  であった．関数における零元は‘常に 0 である関数’であったので，ある関数  $f$  が零元でないとするとき， $f(a) \neq 0$  となるような点  $a \in [-1, 1]$  がある．ここで  $(f|f) = \int_{-1}^1 f(x)^2 dx$  について考える．被積分関数  $f(x)^2$  は連続関数であり，特に  $x = a$  において  $f(a)^2 > 0$  である． $\varepsilon$ - $\delta$  論法において， $\varepsilon = f(a)^2/2$  とすれば，ある正数  $\delta > 0$  が存在して

$$|x - a| < \delta \text{ のとき } |f(x)^2 - f(a)^2| < \frac{1}{2}f(a)^2, \text{ つまり } \frac{1}{2}f(a)^2 < f(x)^2$$

となることがわかる．ここで  $f(x)^2 \geq 0$  であることより

$$\int_{-1}^1 f(x)^2 dx \geq \int_{a-\delta}^{a+\delta} f(x)^2 dx > \int_{a-\delta}^{a+\delta} \frac{1}{2}f(a)^2 dx = \delta f(a)^2 > 0$$

であるので，結局  $f$  が零関数でなければ  $(f|f) > 0$  となる．

以上のことは数学の厳密性についての紹介ですので，試験でこれを要求することはありません．

6.<sup>†</sup> (1) まず，零元  $0_V$  は常に  $(0_V|v) = 0$  であることより， $0_V \in W^\perp$  である．また， $u, v \in W^\perp$  とすれば，内積の線形性から，任意の  $w \in W$  に対して

$$(\lambda u + \mu v|w) = (\lambda u|w) + (\mu v|w) = 0$$

となるので， $\lambda u + \mu v \in W^\perp$  である．よって， $W^\perp$  は  $V$  の部分空間となる．

\*<sup>1</sup> 凡例：無印は基本問題，† は特に解いてほしい問題，\* は応用問題．

(2)  $W$  および  $W^\perp$  がともに部分空間であることから  $W \cap W^\perp \supset \{0_V\}$  は明らか.  $w \in W \cap W^\perp$  とする. このとき  $(w|w)$  を考える. 左の  $w$  を  $W^\perp$  の要素, 右の  $w$  を  $W$  の要素と思えば,  $(w|w) = 0$  となることが分かる. 内積の定義より, 同じものの内積をとって 0 になるのは零元  $0_V$  だけであつたので,  $w = 0_V$  となる. これより  $W \cap W^\perp \subset \{0_V\}$  となり, 結局  $W \cap W^\perp = \{0_V\}$  を得る\*2.

7.† (1)  $(s_n|c_m) = 0$ , (2)  $(s_n|s_m) = \delta_{nm}$ , (3)  $(c_n|c_m) = \delta_{nm}$  ( $\delta_{nm}$  は Kronecker のデルタ).

(1) 被積分関数  $\sin nx \cos mx$  は奇関数なので.

(2), (3) 三角関数の和積の公式

$$\sin nx \sin mx = \frac{\cos(n-m)x - \cos(n+m)x}{2},$$

$$\cos nx \cos mx = \frac{\cos(n-m)x + \cos(n+m)x}{2}$$

と, 次の積分を合わせると得られる:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, dx = \begin{cases} 0 & (k \text{ は } 0 \text{ でない整数}), \\ 2\pi & (k = 0). \end{cases}$$

8.\* 対称行列であり, かつ  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  とおいたときに  $a > 0$  かつ  $\det A > 0$  となること. 言い換えると, 正定値対称行列となること.

まず内積の条件 (3) から  $A$  は対称行列でなければならない. よって  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  とおける. 次に条件 (4) について,  $(x|y)_A$  を計算し, 平方完成すれば

$$(x|y)_A = ax^2 + 2bxy + y^2 = a\left(x + \frac{b}{a}y\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}y^2$$

となる. これより,  $a > 0$  かつ  $ac - b^2 > 0$  とすれば,  $x \neq 0$  ならば常に  $(x|x)$  が正となる.

---

\*2 集合  $A, B$  が等しいことを示すためには  $A \subset B$  かつ  $A \supset B$  を示す事が必要.

# 線形代数学・同演習 B

1 月 17 日分 演習問題\*<sup>1</sup>

1. (1)  $\frac{1}{\sqrt{13}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$  (2)  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$  (3)  $\frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$  (4)  $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

2.<sup>†</sup> (1)  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$  (2)  $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$  (3)  $\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$

(4)  $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{5} & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

3.<sup>†</sup> (1)  $u_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, u_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, u_3(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1)$

(2)  $u_1(x) = \sqrt{\frac{5}{2}}x^2, u_2(x) = \sqrt{\frac{3}{2}}x, u_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(-5x^2 + 3)$

(3)  $u_1(x) = -\sqrt{\frac{3}{2}}x, u_2(x) = -\sqrt{\frac{5}{2}}x^2, u_3(x) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(5x^2 - 3)$

4.  $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$  とおく．まず  $\|\mathbf{u}_1\|^2 = a^2 + b^2 = 1$  なので  $a = \cos \theta, b = \sin \theta$  とおく．ここで  $(\mathbf{u}_1 | \mathbf{u}_2) = 0$  , つまりベクトル  $\mathbf{u}_1$  と  $\mathbf{u}_2$  は直交しているので ,  $\mathbf{u}_2$  は  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  と平行である．そこで  $\mathbf{u}_2 = \alpha \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$  とおけば  $\|\mathbf{u}_2\| = 1$  より  $\alpha = \pm 1$  となるので結論を得る．

5.  $P = (p_1, p_2)$  が直交行列であることと  $[p_1, p_2]$  が正規直交基底であることが同値であること , および先の問題より  $\mathbb{R}^2$  の正規直交基底が全て求まっていることより ,

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix}.$$

- 6.<sup>†</sup>  $A = (a_1, a_2, a_3)$  とし ,  $a_1, a_2, a_3$  に対して Gram-Schmidt の直交化法を適用する．そうして得られた  $\mathbf{u}_i$  は ,  $a_1, a_2, a_3$  を用いて

$$\mathbf{u}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 - \alpha \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \lambda_3 \mathbf{a}_3 - \beta \mathbf{a}_2 - \gamma \mathbf{a}_1$$

のように書ける．ただし  $\lambda_i$  や  $\alpha, \beta, \gamma$  は  $a_1, a_2, a_3$  の内積などを用いて書ける量である (正確に書くと読みづらいのでこのように書いた)．すると ,

$$[\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3] = [a_1, a_2, a_3] \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\alpha & -\gamma \\ 0 & \lambda_2 & -\beta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

と書けるが ,  $P = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3)$  は直交行列であり ,  $U^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -\alpha & -\gamma \\ 0 & \lambda_2 & -\beta \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$  は上三角行列であるので ,  $A = PU$  のように表すことができる．

7.\* (1)  $H_0(x) = 1, H_1(x) = 2x, H_2(x) = 4x^2 - 2, H_3(x) = 8x^3 - 12x, H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12.$

\*<sup>1</sup> 凡例 : 無印は基本問題 , <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題 , \* は応用問題 .

(2)  $\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2} = p_n(x)e^{-x^2}$  ( $p_n(x)$  は  $n$  次の多項式) となることを示せばよい．これは帰納法で簡単に示すことができるので略．

(3) 例題 10.3 とほぼ同様に示すことができる．

(4) 被積分関数が

$$H_n H_m e^{-x^2} = (-1)^n \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) H_m(x)$$

のように書けることに注意．簡単のため  $n \geq m$  と仮定する．部分積分を繰り返し行うことにより，

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) H_m(x) dx &= (-1)^{n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} e^{-x^2} \right) H_m^{(1)}(x) dx \\ &= \cdots = (-1)^{n+m} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} e^{-x^2} \right) H_m^{(m)}(x) dx \end{aligned}$$

を得る．これより  $n > m$  ならば 0 となることが分かる．つまり，この内積に関して多項式  $H_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ) は互いに直交している．因みに  $n = m$  とすれば  $2^n(n!)\sqrt{\pi}$  となる．

8\* (1)  ${}^tE_n = E_n$  より明らか．(2)  $P, Q \in O(n)$  とすれば  ${}^tPP = E_n$ ,  ${}^tQQ = E_n$ ．すると  ${}^t(PQ)PQ = {}^tQ{}^tPPQ = {}^tQQ = E_n$  なので  $PQ \in O(n)$ ．(3)  $({}^tP)^{-1} = {}^t(P^{-1})$  であることを用いる． ${}^tPP = E_n$  より  $E_n = {}^t(P^{-1})P^{-1}$  なので  $P^{-1} \in O(n)$ ．

# 線形代数学・同演習 B

1 月 24 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1.  $(x \cos \theta - y \sin \theta)^2 + (x \sin \theta + y \cos \theta)^2 = x^2 + y^2$  を確かめればよい.

2.<sup>†</sup> (1) 正定値ではない (固有値は 1, 2, -1)

(2) 正定値 (固有値は 4, 4, 1)

(3) 正定値ではない (固有値は 7, -2, -2)

3. (1) エルミート内積を  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  とする. 交代行列  $X$  の固有値を  $\mu$ , 固有ベクトルを  $x$  とすれば,

$$\mu \langle x | x \rangle = \langle Xx | x \rangle = \langle x | {}^t Xx \rangle = \langle x | -Xx \rangle = -\bar{\mu} \langle x | x \rangle$$

なので  $\mu = -\bar{\mu}$ , つまり  $\mu$  は純虚数 (もしくは 0) である.

(2)  $\lambda i$  に対応する固有ベクトルを  $x$  とすると  $Xx = \lambda i x$  であり, この式の両辺の複素共役をとることにより

$$\overline{Xx} = \overline{\lambda i x} \Leftrightarrow X\bar{x} = -\lambda i \bar{x}.$$

(3) (1) より交代行列の固有値は純虚数か 0 であるが, (2) より 0 でない純虚数は  $\pm$  が必ず対となる. したがって,  $n$  が奇数ならば少なくとも 1 つは固有値 0 を持つことになる. 一方, 行列式は固有値の積として得られるので, 奇数次の交代行列の行列式は必ず 0 になる.

4.<sup>†</sup> (1) $\Rightarrow$ (2)  $A$  の固有多項式は  $g_A(t) = t^2 - (a+c)t + (ac-b^2)$  であるので, 固有値は

$$\lambda = \frac{(a+c) \pm \sqrt{(a-c)^2 + 4b^2}}{2} \quad (3)$$

となる. これが正なのだから

$$(a+c)^2 - ((a-c)^2 + 4b^2) = 4(ac-b^2) > 0,$$

つまり  $ac-b^2 > 0$  を得る. これより特に  $a$  と  $c$  は同符号であるが, 式 (3) より  $a > 0$  がわかる. (2) $\Rightarrow$ (1) は逆を辿ればよい.

$$5.<sup>†</sup>  $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(ac-b^2)/a} \end{pmatrix}.$$$

$L = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}$  とおいたとき,  $L^t L = \begin{pmatrix} x^2 & xy \\ xy & y^2 + z^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  なので,  $x, y, z$  を  $a, b, c$  で表せばよい. 問題 4 より  $a > 0, ac-b^2 > 0$  なので根号を取れることに注意.

6. ヒントが間違っていました. 正しくは  $\text{tr}(M) = \text{tr}({}^t M)$  です.

${}^t(AX) = {}^t X {}^t A = -XA$  であることより

$$\text{tr}(AX) = \text{tr}({}^t(AX)) = -\text{tr}(XA).$$

ここで  $\text{tr}(AX) = \text{tr}(XA)$  であることを用いると,  $2\text{tr}(AX) = 0$  を得る.

7.\* (1) 例題 10.3 とほぼ同様. 正值性条件も  $(x|x)_0 = \lambda x^2 + \mu y^2$  であることより明らかである.

<sup>\*1</sup> 凡例: 無印は基本問題, <sup>†</sup> は特に解いてほしい問題, \* は応用問題.

$$(2) \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}^{-1} {}^t X \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$  とおいたとき,  $(x|\mathbf{y}) = (x, y)D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  とかけることより

$$(X\mathbf{x}|\mathbf{y}) = (x, y) {}^t X D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (x, y) D \cdot \underline{D^{-1} {}^t X D} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$(3) \quad {}^t P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} P = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}.$$

条件は  $\tilde{P}P = E_2$  であるが, (2) よりこれは  $D^{-1} {}^t P D \cdot P = E_2$  となるので.

8.\* Jacobian を  $J$  とすれば,  $J = |\det A|$  となる. したがって,  $A$  が直交行列ならば  $J = 1$  である.

$$9.* \quad (1) \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{pmatrix} \quad (2) \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (3) \begin{pmatrix} \cosh x & \sinh x \\ \sinh x & \cosh x \end{pmatrix}$$

# 線形代数学・同演習 B

1 月 31 日分 演習問題<sup>\*1</sup>

1. (1)  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(2)  $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ .

(3)  $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

(4)  $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(5)  $P = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

2.<sup>†</sup> (1)  $P = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

(2)  $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(3)  $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{2} & -2 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(4)  $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{2} \\ -2 & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ .

(5)  $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & -\sqrt{2} & \sqrt{3} \\ 1 & \sqrt{2} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(6)  $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{2} & 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{2} & 2 & 0 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(7)  $P = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} & 6 & -2 \\ -2\sqrt{5} & 0 & 5 \\ 2\sqrt{5} & 3 & 4 \end{pmatrix}$  により  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

<sup>\*1</sup> 凡例：無印は基本問題，<sup>†</sup> は特に解いてほしい問題，\* は応用問題。

$$(8) P = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2\sqrt{5} & \sqrt{6} & 2 \\ \sqrt{5} & 0 & 5 \\ \sqrt{5} & 2\sqrt{6} & -1 \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$(9) P = \frac{1}{\sqrt{42}} \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -3\sqrt{3} & \sqrt{7} \\ 4\sqrt{2} & \sqrt{3} & -\sqrt{7} \\ \sqrt{2} & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{7} \end{pmatrix} \text{ により } P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. (1)  $\det A = (a-1)(b-a)$

(2) (i)  $a = 1$  かつ  $b \neq 1$  (ii)  $a \neq 1$  かつ  $a = b$

(3)  $0 < a < b$  (問題 4 の同値性を使うとよい)

4.\* (1)  $A = (a'_{ij})$ ,  $a'_{jj} = a_{jj}$  ( $j = 1, \dots, n$ ),  $a'_{ij} = (a_{ij} + a_{ji})/2$  ( $i \neq j$ ) とすれば  $A$  は対称行列であって  $f(x) = {}^t x A x$  となる. (2)  $f(x) = {}^t x A x$  において  $y = Sx$  を代入すれば  $f(y) = {}^t (Sy) A Sy = {}^t y {}^t S A S y$  となることより. (3) 対称行列は直交行列により対角化できることと (2) より.

5.\*  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$  とおく.

(1)  $A$  は対称行列なのである直交行列  $P$  により  $A = P \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} {}^t P$  とかける. ここで  $\lambda, \mu$  は  $A$  の固有値である. ここで  $\lambda, \mu > 0$  であることと  $\det A = \lambda\mu$  であることに注意. さて

$$ax^2 + 2by + cy^2 = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t [{}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}] \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} [{}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}]$$

なので  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^t P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  という変数変換を考える.  ${}^t P$  は正則な行列であり  $(x, y)$  に関する積分領域は  $\mathbb{R}^2$  全体なので,  $(u, v)$  に関する積分領域も  $\mathbb{R}^2$  全体である. また変数変換に伴う Jacobian は 1 月 24 日の演習問題 8 により 1 であることがわかっている. よって

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\lambda u^2+\mu v^2)} du dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu v^2} dv \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{\mu}} = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}} \end{aligned}$$

(2)  $A = L {}^t L$  とおけば, 1 月 24 日の演習問題 5 より  $L = \begin{pmatrix} \sqrt{a} & 0 \\ b/\sqrt{a} & \sqrt{(\det A)/a} \end{pmatrix}$  である.

さて

$$ax^2 + 2by + cy^2 = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = {}^t [{}^t L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}] {}^t L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

なので  $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = {}^t L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  という変数変換を考える.  ${}^t L$  は正則な行列であり  $(x, y)$  に関する積分領域は  $\mathbb{R}^2$  全体なので,  $(u, v)$  に関する積分領域も  $\mathbb{R}^2$  全体である. また変数変換に伴う Jacobian は 1 月 24 日の演習問題 8 により  $\det L^{-1} = 1/\sqrt{\det A}$  であることがわかっている. よって

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+2bxy+cy^2)} dx dy = \frac{1}{\sqrt{\det A}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} du dv = \frac{\pi}{\sqrt{\det A}}.$$