

後期から，線形代数の講義はより抽象的になっていきます．抽象的な議論を行うことのメリットとして，まずは色々な場面に応用できるということが挙げられますが，それよりも重要な理由として，考えている対象の構造を明らかにできるということがあると思います．例えば，建物を建てる時に使う材質は建物ごとに違いますが，基本的な骨組みはあまり変わりません．このようなことが数学でもよく起こっており，一見違う空間でも実は同じ構造を持っているということがあります．そこで，材質の違いは後回しにして基礎の構造だけを考えようというのが抽象化の基本的な考え方です．抽象化するためには基になるモデルが必要です．ベクトル空間のモデルは，当然ながら数ベクトル空間 \mathbb{R}^n なので，講義の内容が抽象的すぎてわからないと感じたなら，まずはすべて数ベクトル空間に置き換えて考えてみるとよいでしょう．

最後に，抽象的な数学をやるときのコツを紹介します．それは，始めの方は分からなくても焦ることはないという気持ちを持つことです．実際，いきなり定義だけ与えられても分かるわけではないのです．それがどのように使われているか，どういう意味を持つのか，ということを知っていったら，少しずつ分かるようになるのですから．

参考文献

- [1] 佐藤文広，「これだけは知っておきたい数学ビギナーズマニュアル」，日本評論社

線形独立・線形従属は一見分かりにくい概念です．これは，次回出てくる基底というものを導入するために必要になってくる概念です．基底とは，例えば \mathbb{R}^3 における基本ベクトル

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を一般化したものです． \mathbb{R}^3 の元 $x = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ が

$$x = xe_1 + ye_2 + ze_3$$

のように e_1, e_2, e_3 の線形結合として一意に表現されるように，ベクトル空間の元はその基底の線形結合として 一意に 表現できます．この 一意性 が重要なのです．なぜ重要なのか考えてみましょう．例えばベクトル空間 \mathbb{R}^2 において，

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

とおいたとき，“ $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$ の係数の和は偶数である” という命題を考えます．一見正しそうですが， $x_1 - x_2 - x_3 = 0$ という関係が成り立つことに注意すると $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 2x_1 + x_2 + 2x_3$ と書けるので，表示の仕方によって係数の和の偶奇が変わってしまいます．一意に表示できるということは，このような事態を避けることができるという点で非常に重要です．かの有名なフェルマーの最終定理の証明競争において，‘複素数の範囲では整数の素因数分解の一意性が成り立たない’ ことを見落として，当時の大数学者が間違った証明を与えようとしたというのも有名な話です．

さて，一度基底を取ってしまうと，線形独立性というものは‘前期で扱った連立一次方程式の解が唯一つの解を持つ’ ということと対応していることが分かります．このように，一見新しい概念でも実際のところは今までのものに言い換えになっているということがよくあります．新しい言葉や定義が出てきたら，既存のものとどう関わっているかを考える癖をつけるとよいでしょう．

問題

次の数列はある法則に従っています．この数列の次の数は何でしょう？

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, \dots$$

見るからに Fibonacci 数列なので答えは 13 だと考える人がほとんどでしょう．でも，果たしてそうなのでしょうか．Fibonacci 数列とは異なる法則で，最初の数項が上記の数列になるものを作れないでしょうか．

実際にそのような数列を作ってみましょう．簡単のため， c_1, \dots, c_6 を上記の数列として α は任意の数とします．目標は，一般項が n に関する多項式で与えられる数列 a_n で， $x_i = c_i$ ($i = 1, \dots, 6$), $x_7 = \alpha$ となるものを構成することです．多項式 $q_i(x)$ ($i = 1, \dots, 7$) を

$$q_i(n) = \delta_{in} \quad (n = 1, \dots, 7); \quad \text{つまり } q_i(n) = 1 \ (i = n), \quad q_i(n) = 0 \ (i \neq n)$$

となるようなものにとすると，それらの線形結合をとったもの

$$x_n := c_1 q_1(n) + c_2 q_2(n) + \dots + c_6 q_6(n) + \alpha q_7(n) \quad (1)$$

は確かに n に関する多項式で，しかも $x_i = c_i$ ($i = 1, \dots, 6$) と $x_7 = \alpha$ を満たします．問題は どうやって $q_i(x)$ たちを構成するかということですが，例えば $q_1(x)$ ならば，

$$\begin{aligned} q_1(x) &:= \frac{(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)}{(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)} \\ &= \frac{1}{6!} (x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7) \end{aligned}$$

とすればよいのです¹⁾．このように，始めの数項は Fibonacci 数列と同じであるような数列を作ることができるのです．

ちなみに，式 (1) はベクトル空間 $\mathbb{R}[x]_6$ の基底として q_1, \dots, q_7 を選んだものになっています．この基底を選ぶことにより， $x = 1, 2, \dots, 7$ での値が簡単に計算できるようになっており，このような点で基底を取り替えることの便利さが感じられるかと思います²⁾．

問題. (1) q_2, \dots, q_7 を求めよ³⁾．

(2) x_n を $x_n = a_0 + a_1 n + \dots + a_6 n^6$ の形で求めよ．また $x_i = c_i$ を確認せよ．

¹⁾ この手法は Lagrange の補間公式と呼ばれるものになります．これは，与えられた $n+1$ 個の点で指定した値を取るような 1 変数 n 次多項式を求めるための手法です．

²⁾ 同じ数列を，連立一方程式 $p(i) = c_i$ ($i = 1, \dots, 7$)，ただし $p(x)$ は 6 次多項式，を解くことにより得ることもできますが，計算が大変です．

³⁾ 数式処理ソフトを使うと楽に計算できます．

コラムの問題の解答 .

$$q_1(x) = \frac{1}{720}(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$$

$$q_2(x) = -\frac{1}{120}(x-1)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$$

$$q_3(x) = \frac{1}{48}(x-1)(x-2)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)$$

$$q_4(x) = -\frac{1}{36}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)(x-7)$$

$$q_5(x) = \frac{1}{48}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-6)(x-7)$$

$$q_6(x) = -\frac{1}{120}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-7)$$

$$q_7(x) = \frac{1}{720}(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)$$

$$\alpha + \frac{105 - 49\alpha}{20}n - \frac{2881 - 812\alpha}{360}n^2 + \frac{242 - 49\alpha}{48}n^3 - \frac{214 - 35\alpha}{144}n^4 + \frac{50 - 7\alpha}{240}n^5 - \frac{8 - \alpha}{720}n^6.$$

ベクトル空間の次元とは、基底をなすベクトルの組をなすベクトルの本数だったわけですが、どんなベクトル空間もその本数が有限で収まるわけではありません。例えば多項式全体がなすベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ は有限次元ではありません。実際、任意の自然数 n に対して

$$1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$$

は n 本の線形独立なベクトルの組になります。このようなベクトル空間に対しては本講義で扱う理論は一般には成立せず、有限次元からの類推により無限次元用の理論が生まれています（固有値 \rightarrow スペクトル等）。

無限という言葉が出てきたので、それに纏わる話を少し。

問題

次の集合たちの“要素の個数”を比較せよ。

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad \mathbb{Q}, \quad \mathbb{R}, \quad \mathbb{R}^2.$$

もちろんこれらは無限集合なのでそのまま数は比較できないので、二つの集合の間に全単射があれば等しい、なければ等しくないということとします¹⁾。すると、不思議な事に

$$|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| < |\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^2|$$

となるのです（“要素の数”を $|\mathbb{N}|$ 等の記号で表している）。‘ \mathbb{N} と \mathbb{Q} ’では \mathbb{Q} が、‘ \mathbb{R} と \mathbb{R}^2 ’では \mathbb{R}^2 が圧倒的に数が多いようなものですが...。このように、無限次元になると有限次元では思いもよらなかった事が起こってしまいます。ですので、無限を扱う際には細心の注意が必要となってきます。ちなみに、この無限に関する理論は G. Cantor により創始されました。詳しく調べたい方は参考文献に挙げた本を読んでください。

¹⁾ あまり正確ではないですが。

参考文献

- [1] 「無限」に魅入られた天才数学者たち，アミール・D. アクゼル（著），青木薫（訳），早川書房。

線形写像は、ベクトル空間上の写像の中で最も基本的なものです。実は、より一般の(可微分)写像を考える上でも線形写像が重要な役割を果たします。例えば、二変数関数 $f(x, y)$ の点 $a = (a, b)$ における全微分

$$f(x, y) = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a) = f(a) + f_x(a)(x - a) + f_y(a)(y - b)$$

(ただし、 x, y はそれぞれ a, b に十分近い) に現れる $\nabla f(a)$ は \mathbb{R}^2 から \mathbb{R} への線形写像です。これは、曲面上の各点において、十分小さい近傍をとれば平面とすることができるということを表しています。例えば、地球は球体ですが、地平線・水平線などはまっすぐに見えます¹⁾。もちろんすべての関数がこのようにできるわけではありませんが、それでも非常に応用範囲が広いのです。

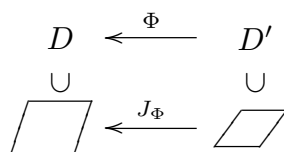
その例として、多変数積分における変数変換との関係を紹介しましょう。 \mathbb{R}^2 の二つの領域 D, D' に対して、その間の同型写像(1対1の写像) $\Phi: D' \rightarrow D$ を $\Phi(u) = (\varphi_1(u), \varphi_2(u)) \in D$ ($u \in D'$) とするとき、次の行列を Φ の Jacobian と呼ぶ:

$$J_\Phi(u) := \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u}(u) & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v}(u) \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u}(u) & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v}(u) \end{pmatrix} \quad (u = (u, v) \in D').$$

このとき、領域 D 上での重積分は、領域 D' 上の重積分として、 J_Φ を用いて

$$\int_D f(x) dx = \int_{D'} f(\Phi(u)) |\det J_\Phi(u)| du$$

となる。つまり、変数変換ができる。なぜこのようにできるかを、ざっくりとではあるが説明してみよう。この $J_\Phi(x)$ は、写像 Φ の‘無限小部分’で、一点 x に非常に近いところにおいて Φ を近似する 線形写像 である。一方、積分とは何だったかという、(i) 領域を小さく分割して、(ii) その上での関数の値とその領域の面積をかけて、(iii) それを足し合わせ、(iv) 領域の面積を限りなく小さくして得られる極限值、であった。さて、元の積分領域 D は Φ によって D' に引き戻されている形である。このとき、 D の小さい領域は線形写像 J_Φ によって引き戻されていると思うことができるが、その面積は、対応する D' の領域の面積の $|\det J_\Phi(x)|$ 倍になる²⁾。つまり、 D' で積分する際に、この‘重みを掛ける’ことによって D の積分を表現しているのである。これが重積分の変数変換に $|\det J_\Phi(x)|$ という量が現れるという仕組みである。



¹⁾ 日本では地平線が見られる場所は少ないですが...

²⁾ 前期の講義の内容!

ベクトル空間という、ただでさえとても抽象的なものを扱っているのに、さらに線形写像というものも出てきて、何をやっているのかが分からないと感じている人も多いと思います。抽象的な議論は応用範囲がとても広いというメリットがある反面、その理論を修得するのに時間が掛かるという難点があります。

ベクトル空間とは和とスカラー倍を持つという最低限の条件だけを与えられたものですが、算数において九九がいつでも現れたように、現代数学においてはベクトル空間はどこでも現れていきます。そして、ベクトル空間において、その構造 (和とスカラー倍) を保存する線形写像は非常に重要な役割を果たします。これまでの講義では、ベクトル空間は基底を指定すれば前期に扱った数ベクトル空間 \mathbb{R}^n のように扱え、しかも線形写像は行列のように扱えるということを話してきました。基底の取り方には任意性があるために色々面倒な議論が必要になってしまいますが、基底を任意に取れるという点はベクトル空間の大きなメリットの一つでもあります。

線形写像の像と核も数学的には重要ですが、この講義では触れられそうにありません¹⁾。ですので、線形写像が与えられたら、それに付随して部分空間を構成できるということを覚えておいてください。

¹⁾ 群論でいうところの準同型定理などですが、そもそも群を定義してないので説明できない。

固有値は，大まかに言えば線形変換の拡大率のことです．例えば $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ は x 軸方向を 2 倍にして， y 軸方向を 3 倍にするような変換だということは，変換の様子を見てもらえば分かるかと思います．固有値が実数のときは，これと同様のことが，対応する固有ベクトルの方向について成り立ちます．複素数になると具体的に想像することができないのでイメージするのが難しいですが，本質的な点は実数のときと同様です．

この講義では扱うベクトル空間は有限次元のものに限っています．それは，無限次元になると，有限次元のときには起こらなかったような現象が起こってしまうからです．例えば，(可微分) 関数全体の空間 $C^1(\mathbb{R})$ において，“微分するという写像” $\frac{d}{dx}$ は線形写像ですが，指数関数 $e^{\xi x}$ ($\xi \in \mathbb{R}$) は

$$\frac{d}{dx} e^{\xi x} = \xi e^{\xi x}$$

となるので，固有ベクトルの定義を満たしており，その固有値は ξ ということになります¹⁾．このように，無限次元においても固有値・固有ベクトル（に対応するもの）を考えると自体は可能ですが，有限次元のときとは全く違う現象が起きています．それは，固有値としてどんな実数でも取ることができるという点です．つまり，固有ベクトルが無数²⁾あるので，有限次元のときに使う対角化の議論³⁾が行えないのです．もちろん，学年が進むと，無限次元のものも扱う必要が出てきます⁴⁾が，考え方の基本は有限次元のときと同じですので，しっかりと押さえておきましょう．

¹⁾ 無限次元のときはスペクトルと呼ぶことが多い．

²⁾ しかも実数濃度!

³⁾ 後期後半の内容

⁴⁾ おそらく

中間試験までの講義の概要¹⁾

ここで、中間試験までの講義のあらすじを振り返ることにしましょう。

数ベクトル空間 \mathbb{R}^n の一般化として、ベクトル空間 というものを考えています。これは“スカラー倍と足し算で閉じている”というとても緩い条件を満たすものであり、数ベクトル空間はもちろん、多項式や関数の空間、行列の空間なども含んでいる、とても応用範囲の広いものです。さて、このようにベクトル空間というものを定義したわけですが、実は基底をとれば、ベクトル空間は、今まで扱ってきた数ベクトル空間 \mathbb{R}^n と同じように扱うことができます²⁾。しかも、ベクトル空間上の線形写像³⁾も、前期に扱った行列として表現することができます。しかしながら、基底のとり方には任意性があり、基底を変えれば表現するものの見た目が変わります。例えば、ベクトル空間の同じ要素でも、基底を変えると表現する数ベクトルが変わってしまいますし⁴⁾、線形写像の表現行列も変わってしまいます。ここがベクトル空間を理解する上で難しい点の一つです⁵⁾。“基底を変えると表現するものの見た目が変わる”と言いましたが、これには規則性があり、基底の変換行列というものをを用いて、その間にある関係を記述することができます。例えば、線形写像 T に対する 2 つの表現行列 A, B の間には $B = Q^{-1}AP$ という関係があります⁶⁾。

線形写像の中でも、線形変換 (同じ空間の間の線形写像) が特に重要で、以降は線形変換を中心に扱っていきます。線形変換 T の、ある基底に関する表現行列を A としたとき、別の基底に関する表現行列 B は必ず

$$B = P^{-1}AP \quad (\text{ただし } P \text{ は正則行列})$$

という形で書けますが、今は“この B をなるべく簡単なものにできないか”という問題について考えています。この問題を解くのに、行列 (線形変換) の 固有値・固有ベクトル が鍵となってくるのです。

後期の後半は、 B を対角行列にできる場合に、どのようにすれば 対角化 できるのかということを中心に扱います。そして、 B を対角行列にするような正則行列 P として良いものはなにか、それを見つけるにはどうすればいいのか、という方向に進んでいきます。

¹⁾ キーワードには下線を引いています。

²⁾ ただし有限次元のベクトル空間に限る。

³⁾ 線形写像は、例えば関数空間での微分や積分といったものも含んでおり、ベクトル空間の写像の中で最も基本的で重要なものです。

⁴⁾ 例えば $V = \mathbb{R}[x]_1$ において、基底として $[x, 1]$ と $[1, x]$ の二つを考えると、 $ax + b = [x, 1] \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = [1, x] \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ のようになる。このとき、 $ax + b$ を表現する数ベクトルは、それぞれ $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ と $\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ であり、これらは違うベクトルである。

⁵⁾ しかし、最大のメリットでもあります。

⁶⁾ ただし P, Q は基底の変換行列。特に、正則行列である。

テイラー
Taylor展開 (あるいはマクローリン
Maclaurin展開) は微分積分の講義で習ったと思います。それは、解析的な関数 $f(x)$ は、 x が 0 に十分近いときに

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

のように表せるというものです。これはベクトル空間の理論の言葉を用いると、“ $1, x, x^2, x^3, \dots$ は解析的な関数全体のなす空間の基底である” と言い換えることができます。また、この例は無限次元のベクトル空間であっても“基底”が存在することがあるということを教えてくれます。

高年次になると Fourier 級数展開・Fourier 変換というものを学びます。Fourier 級数展開は、区間 $[-\pi, \pi]$ 上のなめらかな関数を

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

のように、 \sin と \cos で表すというものです。ベクトル空間の視点から見れば、これは、関数の無限個の組 $1, \sin x, \sin 2x, \dots, \cos x, \cos 2x, \dots$ が区間 $[-\pi, \pi]$ 上の滑らかな関数の空間の基底になっていると思うことが出来ます。しかも、この基底は標準的な内積に関して互いに直交しており、非常に性質の良い基底になっています。ちなみに Euler の公式を用いて \sin, \cos を指数写像 $e^{\pm ix}$ に書き換えると次のようになります:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}. \quad (2)$$

さて、Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ も似たようなことをするわけですが:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (\text{ただし } \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ix\xi} dx), \quad (3)$$

この場合は残念ながら空間が大きすぎて、もはや‘基底’というものが存在しません。しかし、式 (3) の右辺は式 (2) と非常に似ています。これより、式 (2) における Fourier 係数 c_n は e^{inx} の係数であることの類似として、式 (3) の Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ は $e^{ix\xi}$ の‘係数’とすることが出来ます。つまり、Fourier 変換とは“ある種の基底変換を行うことと対応している”と思うこともできるのです。

直交行列というものが出てきました．2 次のものを見てもらえば分かるように，これは回転 + 反転に対応する行列です．特に CG などの応用において，直交行列は非常に重要な役割を果たします．例えば，平面のある図形を連続的に回転させることを考えます．図形は点の集合として実現されているので，その各点 x に回転行列 $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ を掛けます．この $P(\theta)x$ において θ を動かせば，連続的な回転が得られるのです．

では 3 次元の場合はどうでしょうか．たとえば z 軸を軸にした回転行列は

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ですが，特定の方向を軸にした回転，たとえば直線 $x + y + z = 1$ を軸にした回転はどのように表せばよいのでしょうか．また，どのようにすれば“自然な”回転で連続的に動かすことができるのでしょうか．

この問題に対する解答の一つを与えるものが“Lie 群と Lie 環”というものになります．大雑把に言えば，「回転を表す行列の群 (直交行列)」と「あるベクトル空間 (交代行列)」とがうまく対応しているというもので，具体的には次のように対応しています：

$$\text{交代行列 } X = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \mapsto \exp X: \det = 1 \text{ の直交行列}^{1)}.$$

特にベクトル空間はまっすぐな空間なので，一度ベクトル空間に移して，そこで線形補間をしたあとで回転行列に戻してやれば“自然な”回転を実現することができる，という仕組みです．

工学系では四元数を用いて回転を記述する手法がよく使われていますが，原理は交代行列を用いたものと同様です．四元数を用いる方が省スペースで積も簡単，しかも例外処理も少ないので重宝されているようです．興味を持たれた方は，参考文献に挙げた本を読んでみては如何でしょうか．

¹⁾ \exp は行列の指数写像．

参考文献

- [1] 矢野忠，「四元数の発見」，海鳴社．

・ベクトル空間に関する用語の復習

ベクトル空間 和とスカラー倍ができる空間 \equiv まっすぐな空間．数ベクトル空間 \mathbb{R}^n や多項式全体の空間，行列全体のなす空間などを一括して扱うことができる．また，円周や球面などの‘曲がっている空間’はベクトル空間ではない．

基底 ベクトル空間の要素を表すための座標となるベクトルの組のこと．一つ固定すれば，ベクトルを数ベクトルのように扱える．正規直交基底という‘良い基底’がある．

次元 基底を構成するベクトルの本数のこと．

部分空間 ベクトル空間の部分集合で，それ自身がベクトル空間となっているもののこと．
部分空間の例：線形写像の核と像，固有空間など．

・線形写像に関する用語

線形写像 二つのベクトル空間 V, W を結ぶ写像 $T: V \rightarrow W$ で，次を満たすもの．

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \quad (\lambda, \mu \in \mathbb{K}, x, y \in V).$$

つまり，線形演算に関して展開できるような写像のこと． V, W の基底をそれぞれ一つ決めたら，線形写像は行列として表現することができる．これを表現行列という．

線形変換 送り元と行き先が同じ空間であるときには線形変換と呼ぶ．線形変換の表現行列は必ず正方行列となる．

共役 同じ線形変換に関する 2 つの表現行列 A, B は‘共役’という関係で結ばれている．共役は，ある正則行列 P を用いて $B = P^{-1}AP$ とかけるものである．

対角化 ある線形変換の表現行列の中で，最も簡単なもの (= 対角行列) を探す．

固有値・固有ベクトル どちらも線形変換に関する量であり，固有ベクトルは線形変換で方向が変わらないベクトル，固有値はそのときの (符号付き) 拡大率を表す．

固有空間 $W(\lambda; A)$ 線形変換に付随する空間で，その変換を施しても空間として変わらないような部分空間．特に，固有ベクトルがその基底となる． $\sum \dim W(\lambda_i; A) = \dim V$ のとき， A は対角化可能である．

・内積空間に関する用語

内積空間 ベクトル空間に‘内積’が入ったもの．内積は，ベクトル空間に‘長さ’と‘角度’を定義する．正規直交基底という良い基底を与えるために必要となる．

Gram-Schmidt の直交化法 与えられた基底から，その情報をなるべく損なわないように正規直交基底を構成する手法．

直交変換・行列 ‘長さ’と‘角度’を変えないという良い性質を持つ変換・行列のこと．行列ならば， ${}^tPP = E_n$ という条件をみたすことに注意．また，対称行列は‘直交行列’により対角化できる．