線型代数学・同演習 A

6 月 2 日分　演習問題

1. 多項式 $e(x)$, $s(x)$, $c(x)$ を次で定義する．

$$e(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!},\quad s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},\quad c(x)=\sum_{n_0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

このとき，次の多項式における $(x+y)^k$ の係数を求めよ．またこれらの多項式を $e(x)$, $s(x)$, $c(x)$ を用いて記述せよ (これは無限級数であるが，この場合は総和記号の順番の入れ替え等は自由にしてよいとする).

$$(1)\quad e(x)e(y),\qquad (2)\quad s(x)c(y)+c(x)s(y),\quad (3)\quad c(x)c(y)+s(x)s(y).$$

2. 行列のトレース tr について，以下を示せ．ただし A,B は n 次正方行列，$C=(c_{ij})$ は $m\times n$ 行列とする．

$$(1)\quad \mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA),\qquad (2)\quad \mathrm{tr}(C\,{}^tC)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}^2$$

3. A を任意の n 次正方行列とする．以下を示せ．
(1) $\frac{1}{2}(A+{}^tA)\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$　　(2) $\frac{1}{2}(A-{}^tA)\in\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$
(3) $A=X+Y$ となる対称行列 $X\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})$ と交代行列 $Y\in\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$ が存在する．

4. n 次対称行列 A,B に対して新しい積 $\cdot$ を次で定義する[*1]:

$$A\cdot B:=\frac{1}{2}(AB+BA)\quad (\text{右辺の積は通常の行列積}).$$

このとき次を示せ．

$$(1)\quad A\cdot B\in\mathrm{Sym}(n,\mathbb{R})\qquad (2)\quad A\cdot B=B\cdot A\qquad (3)\quad A^2\cdot(A\cdot B)=A\cdot(A^2\cdot B)$$

5. $[X,Y]$ を正方行列の交換子とする (4 月 21 日分の演習問題 8 を参照)．この交換子は以下の空間 $\mathfrak{g}$ において閉じている，すなわち $X,Y\in\mathfrak{g}$ ならば $[X,Y]\in\mathfrak{g}$ であることを示せ[*2]．

(1)　$\mathfrak{g}=\mathfrak{so}(n,\mathbb{R}):=\mathrm{Alt}(n,\mathbb{R})$,　　(2)　$\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}(n,\mathbb{R}):=\{X\in\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R})\,;\,X+{}^tX=O\}$
(3)　$\mathfrak{g}=\mathfrak{sp}(n,\mathbb{R}):=\{X\in\mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R})\,;\,{}^tXJ_{n,n}+J_{n,n}X=O\}$

ここで

$$\mathrm{Mat}(n,\mathbb{R}):=\{n\text{ 次正方行列全体 }\},\quad J_{n,n}:=\begin{pmatrix}O & E_n\\ -E_n & O\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}(2n,\mathbb{R}).$$

[*1] この積を Jordan 積といい，この積が定義されている代数を Jordan 代数という．
[*2] この性質を持つ行列の部分空間を (線型)Lie 代数という．