

線型代数学・同演習 A

6 月 2 日分 演習問題

1. 多項式 $e(x)$, $s(x)$, $c(x)$ を次で定義する .

$$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

このとき, 次の多項式における x^k の係数を求めよ . またこれらの多項式を $e(x)$, $s(x)$, $c(x)$ を用いて記述せよ (これは無限級数であるが, この場合は総和記号の順番の入れ替え等は自由にしてよいとする) .

$$(1) \quad e(x)e(y), \quad (2) \quad s(x)c(y) + c(x)s(y), \quad (3) \quad c(x)c(y) + s(x)s(y).$$

2. 行列のトレース tr について, 以下を示せ . ただし A, B は n 次正方行列, $C = (c_{ij})$ は $m \times n$ 行列とする .

$$(1) \quad \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA), \quad (2) \quad \text{tr}(C^t C) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij}^2$$

3. A を任意の n 次正方行列とする . 以下を示せ .

$$(1) \quad \frac{1}{2}(A + {}^t A) \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \quad (2) \quad \frac{1}{2}(A - {}^t A) \in \text{Alt}(n, \mathbb{R})$$

(3) $A = X + Y$ となる対称行列 $X \in \text{Sym}(n, \mathbb{R})$ と交代行列 $Y \in \text{Alt}(n, \mathbb{R})$ が存在する .

4. n 次対称行列 A, B に対して新しい積 \cdot を次で定義する^{*1}:

$$A \cdot B := \frac{1}{2}(AB + BA) \quad (\text{右辺の積は通常の行列積}).$$

このとき次を示せ.

$$(1) \quad A \cdot B \in \text{Sym}(n, \mathbb{R}) \quad (2) \quad A \cdot B = B \cdot A \quad (3) \quad A^2 \cdot (A \cdot B) = A \cdot (A^2 \cdot B)$$

5. $[X, Y]$ を正方行列の交換子とする (4 月 21 日分の演習問題 8 を参照) . この交換子は以下の空間 \mathfrak{g} において閉じている, すなわち $X, Y \in \mathfrak{g}$ ならば $[X, Y] \in \mathfrak{g}$ であることを示せ^{*2} .

$$(1) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) := \text{Alt}(n, \mathbb{R}), \quad (2) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \text{Mat}(n, \mathbb{R}); X + {}^t X = O\}$$
$$(3) \quad \mathfrak{g} = \mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) := \{X \in \text{Mat}(2n, \mathbb{R}); {}^t X J_{n,n} + J_{n,n} X = O\}$$

ここで

$$\text{Mat}(n, \mathbb{R}) := \{n \text{ 次正方行列全体} \}, \quad J_{n,n} := \begin{pmatrix} O & E_n \\ -E_n & O \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2n, \mathbb{R}).$$

^{*1} この積を Jordan 積といい, この積が定義されている代数を Jordan 代数という .

^{*2} この性質を持つ行列の部分空間を (線型)Lie 代数という .