線型代数学・同演習 A

6 月 23 日分　演習問題

1. 次の行列式を余因子展開を用いて計算せよ．

$$(a)\ \begin{pmatrix} -6 & 1 & -3 \\ -9 & 6 & 2 \\ 8 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} -6 & -9 & 1 \\ 1 & 6 & -1 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 7 & -4 & 9 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. 次の行列式を計算せよ．

$$(a)\ \begin{vmatrix} 0 & -4 & -1 & -3 \\ -4 & -5 & 4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 & -6 \\ 2 & 6 & 8 & -3 \end{vmatrix} \qquad (b)\ \begin{vmatrix} -5 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -4 & 3 & 5 \end{vmatrix} \qquad (c)\ \begin{vmatrix} -5 & 3 & 3 & -1 \\ 3 & -4 & 4 & -5 \\ -3 & -4 & 2 & -4 \\ 4 & 5 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$(d)\ \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 2 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 4 & -1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \qquad (e)\ \begin{vmatrix} -1 & -3 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 5 & 3 \end{vmatrix}$$

3. 次の n 次正方行列の行列式を計算せよ．

$$(a)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots & a_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_{n-1} & a_{n-1} \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_{n-1} & c_n \end{pmatrix}$$

4. A, D を正方行列とし，特に A は正則であるとする．このとき以下を示せ．

(a) $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & O \\ CA^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & O \\ O & D - CA^{-1}B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A^{-1}B \\ O & I \end{pmatrix}$,

(b) $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = \det(A)\det(D - CA^{-1}B)$.

5. n 次の歪対称行列 X について，以下を示せ．

(a) n が奇数ならば，$\det(X) = 0$,

(b) n が偶数ならば，ある多項式[*1] $\mathrm{Pf}(X)$ が存在して $\det(X) = (\mathrm{Pf}(X))^2$.

※ この講義のホームページの URL は以下のとおりです．

http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2015LA.html

---

[*1] この多項式 $\mathrm{Pf}(X)$ をパフィアン (Pfaffian) という．