線型代数学・同演習 A

6 月 2 日分　小テスト

学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　氏名：

次の和を計算せよ.

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2 \qquad\qquad (2)\quad \sum_{1\le i<j\le n}(j-i)$$

$$
\begin{aligned}
(1)\quad &\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i+j)^2\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i^2+2ij+j^2)\\
&=\sum_{i=1}^{n}ni^2+2\left(\sum_{i=1}^{n}i\right)\left(\sum_{i=j}^{n}j\right)+\sum_{j=1}^{n}nj^2\\
&=\frac{2}{6}n^2(n+1)(2n+1)+2\left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2\\
&=\frac{1}{6}n^2(n+1)(7n+5) \qquad \square
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(2)\quad &\sum_{1\le i<j\le n}(j-i)\\
&=\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(j-i)\\
&=\sum_{j=2}^{n}j\left((j-1)j-\frac{1}{2}(j-1)j\right)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{n}(j^2-j)\\
&=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(j^2-j)\quad (\because (j^2-j)|_{j=1}=0\text{ なので})\\
&=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right)\\
&=\frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \qquad \square
\end{aligned}
$$