

線型代数学・同演習 A

4 月 21 日分 小テスト

学籍番号：

氏名：

(1) 平面 $x + 2y + z = 1$ について以下の問に答えよ．

(i) 点 $(5, 2, 4)$ を通り，この平面に平行な平面 H の方程式（標準形）を求めよ．

(ii) 原点と平面 H との距離を求めよ．

(iii) この平面に垂直で，点 $(5, 2, 4)$ を通る直線の方程式（標準形）を求めよ．

解)

(i) 法線ベクトルが $(1, 2, 1)$ で点 $(5, 2, 4)$ を通るので

$$1 \cdot (x - 5) + 2 \cdot (y - 2) + 1 \cdot (z - 4) = 0, \quad \text{つまり} \quad x + 2y + z = 13.$$

(ii)
$$\frac{|13|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{13}{\sqrt{6}}.$$

(iii) 方向ベクトルが $(1, 2, 1)$ で点 $(5, 2, 4)$ を通るので

$$\frac{x - 5}{1} = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 4}{1}.$$

(2) 2 次正方行列の行列式に関する次の等式を証明せよ．

$$\det(AB) = \det(A) \det(B)$$

解)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \text{ とおく． } \det(A) = ad - bc, \det(B) = xw - yz \text{ より}$$

$$\det(A) \det(B) = (ad - bc)(xw - yz) = adxw - adyz - bcxw + bcyz.$$

$$\text{一方で } AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bw \\ cx + dz & cy + dw \end{pmatrix} \text{ なので}$$

$$\begin{aligned} \det(AB) &= (ax + bz)(cy + dw) - (ay + bw)(cx + dz) \\ &= (acxy + adxw + bcyz + bdzw) - (acxy + adyz + bcxw + bdzw) \\ &= adxw + bcyz - adyz - bcxw. \end{aligned}$$

両者を比較すれば $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ を得る．