線型代数学・同演習 A

4 月 28 日分　演習問題

1. 次の二つのベクトルのノルムとそれらのなす角を求めよ．

   (1)　$\mathbf{a} = {}^t(1,0,1),\ \mathbf{b} = {}^t(2,2,1)$　(2)　$\mathbf{a} = {}^t(1,-3,2),\ \mathbf{b} = {}^t(-2,-1,3)$

2. 4 点 $(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,1)$ を頂点とする四角形は，次の行列によってどのように移るか．

$$(1)\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\quad (2)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix},\quad (3)\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad (4)\ \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. $D = \{(x,y)\,;\, 0 \geq x \geq 1,\ 0 \geq y \geq 1\}$ を単位正方形，K を 4 点 $(0,0),\ (1,2),\ (0,4),\ (-1,2)$ を頂点とする菱形とする．

   (1) D を K に写すような平面の線形写像を決定せよ．

   (2) 同じく，D を K に写すような平面のアフィン写像を決定せよ．

4. 放物線 $y = x^2$ を (集合として) 動かさないようなアフィン変換の一般形を示せ．また，この変換で原点が写り得る位置を示せ．

5. 直線 $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{5}$ は次の行列 A による変換でどのような直線にうつるか．その直線の方程式 (標準形) を求めよ．

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

6. 次の直線に関する (平面の) 鏡映写像を行列を用いて表せ．

$$(1)\quad l_1 \colon x + y = 8 \quad (2)\quad l_2 \colon ax - y = b \quad (a > 0)$$

7. 次の平面に関する (空間の) 鏡映写像を行列を用いて表せ．

   (1)　$\pi_1 \colon x + y + z = 8$　　(2)　$\pi_2 \colon 2x - 4y + z = 5$

   (3)　$\pi_3 \colon x + y + az = a \quad (a > 0)$

8. (1) $\mathbf{x} = {}^t(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{y} = {}^t(y_1, y_2, y_3)$ のとき，次を示せ：

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

   (2) $||\mathbf{x} \times \mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x}||^2||\mathbf{y}||^2 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})^2$ を示せ．

   (3) $(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = 0$ を示せ (Jacobi の恒等式)．