線型代数学・同演習 A

7 月 21 日分　演習問題†

1. 次の空間が線型部分空間であることを示せ．
   (a) A を $n \times m$ 行列としたとき，$\ker A \subset \mathbb{R}^m$ および $\mathrm{Im}\, A \subset \mathbb{R}^n$.
   (b) $\mathbb{R}^n$ の中の s 本のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s$ によって張られる空間 $\mathrm{Span}(\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s) \subset \mathbb{R}^n$.
2. 次のベクトルの組は線形独立かどうか調べよ．

$$(a)\ \begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-3\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\4\\2\end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix}1\\4\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-4\\3\\3\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-13\\1\\3\\-9\end{pmatrix}$$

3. 次のベクトル線形独立な最大個数 r を求め，r 個の線形独立なベクトルを求めよ．また他のベクトルをこれらの線形結合で表わせ．

$$(a)\ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_4\boldsymbol{a}_5) = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 & -9 & -5 \\ -1 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -4 & -6 & 5 \\ 3 & -4 & -7 & -11 & 4 \end{pmatrix}$$

$$(b)\ (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3\boldsymbol{b}_4\boldsymbol{b}_5) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 4 & 5 & -4 \\ -3 & 2 & 4 & -1 & -4 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & 7 \end{pmatrix}$$

4. 次のベクトルの組は $\mathbb{R}^3$ の基底をなすことを示し，$\boldsymbol{x} = {}^t(x, y, z)$ をその線形結合で表わせ．

$$(a)\ (\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (b)\ (\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2\boldsymbol{b}_3) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ を $\mathbb{R}^2$ の基底とし，また $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ の線形結合を

$$x\boldsymbol{u} + y\boldsymbol{v} = [\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

のように表す．また線形写像 A は標準基底 $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2$ に関して

$$A\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \quad A\boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

であるとする．このとき線形変換 A は式 (1) においてどのように作用するか．つまり，以下を満たす B を求めよ．

$$A\,[\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}] \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = [\boldsymbol{u}\,\boldsymbol{v}]\, B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

† http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~h-nakashima/lecture/2015LA.html