線型代数学・同演習 A

4 月 21 日分　演習問題

1. 次の二つの n 次正方行列 A, B に対して，積 AB および積 BA を計算せよ．また $n=3$ のとき，その行列を具体的に書け．
   (a) $A=(a_i\delta_{ij})$, $B=(b_{ij})$. ただし δ_{ij} はクロネッカーの δ: $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j).\end{cases}$
   (b) $A=(i+j)_{i,j}$, $B=(j-k)_{j,k}$
   (c) $A=(a_{ij}), B=(b_{ij})$ は共に下三角行列．すなわち，$i<j$ のとき $a_{ij}=b_{ij}=0$.
2. 次の連立方程式を行列を用いて解け．

   (1) $\begin{cases}3x-2y=7\\ x+2y=5\end{cases}$　(2) $\begin{cases}ax+2y=a^2+4\\ 2x-ay=a^2+4\end{cases}$　(3) $\begin{cases}(a+2)x+ay=a+2\\ (a+4)x+(a+2)y=a\end{cases}$
3. 空間の点 $(1,2,3)$ を通り，方向 $(0,2,1)$ を持つ直線の方程式を書け．
4. 空間の点 $(1,0,3)$ を通り，法線ベクトル $(0,2,1)$ を持つ平面の方程式を書け．
5. 次の空間の三点を通る平面の方程式を求めよ．

   (1) $(1,1,1)$, $(1,2,3)$, $(3,2,1)$　(2) $(1,1,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$
   (3) $(2,-1,3)$, $(-1,2,1)$, $(3,1,-1)$　(4) $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$
6. 次の平面の方程式を求めよ．
   (a) 点 $(1,-1,3)$ を通り，平面 $2x+y-2z=1$ に平行な平面
   (b) $g_1\colon x-x_1=\dfrac{y-y_1}{2}=\dfrac{z-z_1}{3}$, $g_2\colon x-x_2=\dfrac{y-y_2}{-1}=z-z_2$ とするとき，点 (x_0,y_0,z_0) を通り直線 g_1, g_2 に平行な平面
   (c) $g_1\colon \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{2}$, $g_2\colon \dfrac{x+4}{-1}=y=\dfrac{z-1}{3}$ とするとき，直線 g_1 を含み直線 g_2 に平行な平面
7. 次の 2 平面の交線を求めよ．
   (a) $\pi_1\colon 2x-y+z=3$,　$\pi_2\colon 3x-5y+2z=1$.
   (b) $\pi_1\colon 2x+2y-2z=3$,　$\pi_2\colon x+2y+3z=5$.
   (c) $\pi_1\colon x-2y+5z=0$,　$\pi_2\colon x-y+z=-2$.
8. 二つの n 次正方行列 X, Y の交換子を $[X,Y]:=XY-YX$ で定義する．次を示せ．
   (a) $[X,Y]+[Y,X]=0$
   (b) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$　(Jacobi の恒等式)
   (c) X, Y がともに歪対称行列のとき $[X,Y]$ はまた歪対称行列となることを示せ．X, Y がともに対称行列のときはどうか．