12　多次元分布（2）

導入

引き続き多次元分布の諸性質について学ぶ．特に二つの確率変数二つの確率変数 X, Y の和 $X + Y$ に関係する事柄について詳しく考察していく．

12.1　確率変数の和

二つの確率変数 X, Y があったとき，それらを足したもの $Z = X + Y$ はまた確率変数になる．したがって Z の期待値や分散というものも考えられる．まず以下の定義をする．

定義 12.1

確率変数 X, Y について，$\mu_X = \mathbb{E}[X], \mu_Y = \mathbb{E}[Y]$ とするとき，次を X と Y の**共分散**という．

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)].$$

$X = Y$ とすればこれは通常の分散の定義式と一致する点に注意．このとき，以下が成り立つ．

命題 12.2

次が成り立つ．

(1)　$\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$

(2)　$V[X + Y] = V[X] + 2\mathrm{Cov}(X, Y) + V[Y]$

(3)　$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

証明に入る前に，確率密度関数 $f(x, y)$ と周辺確率密度関数 $f_X(x)$, $f_Y(y)$ を用いて，これらの式の意味を説明する．

$$\mathbb{E}[X + Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x + y)f(x, y)\,dxdy,$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\right)dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y] &= \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\right)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy\end{aligned}$$

すなわち，X, Y の期待値はそれぞれ周辺分布に関しての期待値を考える．分散・共分散に関する式においても同様である．

証明． (1) 定義に従って計算すれば

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[X + Y] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x + y)f(x, y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y)\,dxdy + \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y)\,dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dy\right)dx \\ &\qquad + \int_{-\infty}^{\infty} y\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\right)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y].\end{aligned}$$

(2) 定義に従って計算すれば良い．

$$\begin{aligned}&V[X + Y] = \mathbb{E}[(X + Y - \mathbb{E}[X + Y])^2] \\ &= \mathbb{E}[((X - \mu_X) + (Y - \mu_Y))^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)^2 + 2(X - \mu_X)(Y - \mu_Y) + (Y - \mu_Y)^2] \\ &= V[X] + 2\mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] + V[Y]\end{aligned}$$

(3) 定義に従って計算すると

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(X, Y) &= \mathbb{E}[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)] \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mu_X\mathbb{E}[Y] - \mu_Y\mathbb{E}[X] + \mu_X\mu_Y \\ &= \mathbb{E}[XY] - \mu_X\mu_Y = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

となる． □

演習問題 12.3. 6 面体に $0, 1, 2$ の数字が 2 面ずつ書かれたサイコロがある．このサイコロを 2 回投げる．X を最初に投げたときの出た目を表す確率変数とし，Y を「(2 回目に出た目)−(最初に出た目)」を表す確率変数とする．

(1)　確率変数 X, Y の同時確率分布表を作成せよ．

(2)　X, Y それぞれの期待値および分散を計算せよ．

(3)　共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ を計算せよ．

注意． 共分散は単位変換によって値を大きく変えるため，比較という観点では扱いづらい．そこで共分散を分散の平方で割った

$$\rho(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V[X]}\,\sqrt{V[Y]}}$$

を扱うことも多い．これは**相関係数**と呼ばれ，次の性質を持つ．

(1)　正定数 $a, b > 0$ に対し $\rho(aX, bY) = \rho(X, Y)$

(2)　$-1 \leqq \rho(X, Y) \leqq 1$

相関係数は，その名の通り二つの確率変数 X と Y がどのように相関しているのかを，数値的に表現してくれる．実際，相関係数の絶対値が大きいほど X と Y は強い相関関係があり，逆に 0 に近いほど相関関係が薄くなる．

12.2　X と Y が独立のとき

X と Y が独立であると仮定すると，色々な式が簡略化され見通しが良くなる．

命題 12.4

X と Y が独立であれば

(1)　$\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]$

(2)　$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$

(3)　$V[X+Y] = V[X] + V[Y]$

証明． (1) を示せば十分である．X, Y が独立ならば　$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$　であるので，

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xf_X(x)\,dx \int_{-\infty}^{\infty} yf_Y(y)\,dy \\ &= \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y]\end{aligned}$$

となる．□

注意． 以下の演習問題 12.10 でみるように，この命題の逆は成立しない．

二つの確率変数の和 $X+Y$ に関する確率密度関数は一般には簡単には計算できないが，X, Y が独立である場合は「畳み込み」という操作で得られるものになっている．証明は省略する．

命題 12.5

2 つの確率変数 X, Y が独立であるとし，その和 $Z = X + Y$ について考える．

- 連続型の場合，Z の確率密度関数は**畳み込み**で与えられる．

$$\begin{aligned}f_Z(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,dy\end{aligned}$$

- 離散型の場合は，Z の確率分布は

$$P(Z=z) = \sum_x P(X=x)P(Y=z-x)$$

で与えられる．

モーメント母関数についても，X, Y が独立ならばきれいな公式が成り立つ．

命題 12.6

確率変数 X, Y が独立ならば，$X+Y$, X, Y それぞれのモーメント母関数は

$$M_{X+Y}(t) = M_X(t)M_Y(t)$$

という関係式を持つ．

証明． 命題の (1) を用いて

$$\begin{aligned}M_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}] = \mathbb{E}[e^{tX}e^{tY}] \\ &= \mathbb{E}[e^{tX}]\mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t)M_Y(t)\end{aligned}$$

となることより．□

12.3　演習問題

演習問題 12.7. 確率変数 X, Y はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うと仮定する．このときその和 $Z = X + Y$ の確率密度関数を求めよ．

演習問題 12.8. 確率変数 X, Y はそれぞれポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1), \mathrm{Po}(\lambda_2)$ に従うとする．このとき $Z = X + Y$ はパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$ に従うことを示せ．

演習問題 12.9. (1)　確率変数 X が正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．このとき確率変数 $Y = X^2$ の密度関数を求めよ．

(2)　確率変数 X_1, X_2 が独立に正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．このとき確率変数 $Y = X_1^2 + X_2^2$ の密度関数を求めよ．

(3)　n を自然数とする．確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立に正規分布 $N(0,1)$ に従うとする．このとき確率変数 $Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ の密度関数を求めよ．

演習問題 12.10. $\Omega = \mathbb{R}$ 上の確率分布で，次の密度関数を持つものを考える．

$$f(\omega) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} & (0 \leqq \omega \leqq 2\pi) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

確率変数 X, Y をそれぞれ $X(\omega) = \cos\omega$, $Y(\omega) = \sin\omega$ $(\omega \in \Omega)$ により定義する．

(1)　X, Y は独立ではないことを示せ．

(2)　$\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ および $\mathbb{E}[XY]$ をそれぞれ計算せよ．

12.4 補足

12.4.1 相関係数に関する性質の証明

証明． (1) 分散の性質より $V[aX] = a^2 V[X]$ およびおよび $V[bY] = b^2 V[Y]$ であり，また

$$\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\mathrm{Cov}(X, Y)$$

であることより明らか．

(2) まず次の期待値を考える．

$$\mathbb{E}[(tX - Y)^2] \geqq 0$$

左辺を展開すれば

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(t(X-\mu_X) - (Y-\mu_Y))^2] \\
&= t^2\mathbb{E}[(X-\mu_X)^2] - 2t\mathbb{E}[(X-\mu_X)(Y-\mu_Y)] \\
&\qquad + \mathbb{E}[(Y-\mu_Y)^2] \\
&= t^2 V[X] - 2t\mathrm{Cov}(X,Y) + V[Y]
\end{aligned}$$

であり，これが非負であるので t に関する 2 次関数と見れば，その判別式 D について

$$D/4 = \mathrm{Cov}(X,Y)^2 - V[X]\,V[Y] \leqq 0$$

これより $\rho(X,Y)^2 \leqq 1$ を得る． □

12.4.2 $Z = X + Y$ の確率密度関数に関して

1 変数の確率変数における変数変換公式を復習しよう．X を連続型の確率変数で，その確率密度関数を $f(x)$ とする．$u(x)$ を微分可能な狭義単調増加関数とし，その逆関数を $v(x)$ とする．このとき $Y = u(X)$ の確率密度関数は

$$f\bigl(v(y)\bigr)\,v'(y)$$

で与えられる．多変数においても，同様の公式を導出できる．

公式 12.11

確率変数 X, Y の同時確率密度関数を $f(x,y)$ とする．変数変換 $z = \phi_1(x,y)$, $w = \phi_2(x,y)$ による新しい確率変数 Z, W の同時確率密度関数 $g(z,w)$ について考える．ϕ_1, ϕ_2 の逆変換を ψ_1, ψ_2 とするとき，$g(z,w)$ は

$$g(z,w) = f\bigl(\psi_1(z,w),\ \psi_2(z,w)\bigr)\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}\right|$$

である．ただし

$$\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix}$$

はヤコビアンである．

この公式を利用して，確率変数 X, Y の和で定義される確率変数 $Z = X + Y$ の密度関数を計算することができる．命題の証明は以下の通り．

証明． 次の変換を考える．

$$\phi\colon \begin{cases} z = x + y, \\ w = x \end{cases} \iff \psi\colon \begin{cases} x = w, \\ y = z - w \end{cases}$$

すると，求めるべきものは $f_Z(z)$ である．変数変換公式を適用するためにヤコビアンを計算すれば

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\left|\det\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,w)}\right| = \bigl|-1\bigr| = 1.$$

したがって，X, Y の独立性より $f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$ であることを用いると，合成関数 $g(z,w)$ は

$$g(z,w) = f(w, z-w) = f_X(w)f_Y(z-w)$$

となる．求めたいものは z の周辺密度関数 $f_Z(z)$ であったので

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z,w)\,dw = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(w)f_Y(z-w)\,dw$$

となる． □

演習問題 12

(1) 6 面体に $0, 1, 2$ の数字が 2 面ずつ書かれたサイコロがある．このサイコロを 2 回投げる．X を最初に投げたときの出た目を表す確率変数とし，Y を「(2 回目に出た目)−(最初に出た目)」を表す確率変数とする．

(a) 確率変数 X, Y の同時確率分布表を作成せよ．

(b) X, Y それぞれの期待値および分散を計算せよ．

(c) 共分散 $\mathrm{Cov}(X, Y)$ および相関係数 $\rho(X, Y)$ を計算せよ．

(2) 確率変数 X, Y はそれぞれ正規分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$ に従うと仮定する．このときその和 $Z = X + Y$ の確率密度関数を求めよ．

(3) 確率変数 X, Y はそれぞれポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1), \mathrm{Po}(\lambda_2)$ に従うとする．このとき $Z = X + Y$ はパラメータ $\lambda_1 + \lambda_2$ のポアソン分布 $\mathrm{Po}(\lambda_1 + \lambda_2)$ に従うことを示せ．

(4) (a) 確率変数 X が正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする．このとき確率変数 $Y = X^2$ の密度関数を求めよ．

(b) 確率変数 X_1, X_2 が独立に正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする．このとき確率変数 $Y = X_1^2 + X_2^2$ の密度関数を求めよ．

(c) n を自然数とする．確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ は独立に正規分布 $N(0, 1)$ に従うとする．このとき確率変数 $Z = X_1^2 + \cdots + X_n^2$ の密度関数を求めよ．