8　連続型確率変数

導入

今回から連続型の確率変数についても扱っていく．連続型の確率変数とは，大雑把に言えば，$\mathbb{R}$ 上での定積分が $\displaystyle\int f(x)\,dx = 1$ となるような非負の値をとる関数 $f(x)$ を用いて表現できるものである．

まず確率変数について復習しよう．確率変数 X とは，ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への可測関数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ のことである．これは，一般の空間上における確率を，$\mathbb{R}$ 上の確率と思うことに対応する．有限集合上のものだと，以下のような確率分布表を用いて表せる．

X の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

この X の値域に応じて離散型・連続型といった型がある．今回は連続型の確率変数を紹介する．

8.1　確率密度関数

密度関数と呼ばれる，定義領域上での定積分の値が 1 である非負関数 $p(x)$ を用いて表現される．

定義 8.1

確率変数 X が，ある $\mathbb{R}$ 上の可積分関数 $f(x)$ で

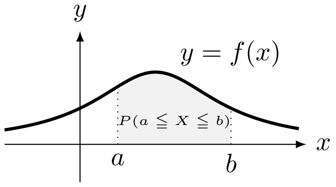
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

を満たすものを用いて

$$P(a \leqq X \leqq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

となっているとき，X を連続型の確率変数という．またこの関数 $f(x)$ を (**確率**) **密度関数**という．

注意． 以下の例でみるように，密度関数は必ずしも連続関数である必要はない．この「連続」という語は，X の値域が「離散的ではない」ということを表しているに過ぎない．



以下でよく用いられる連続型分布を紹介する．

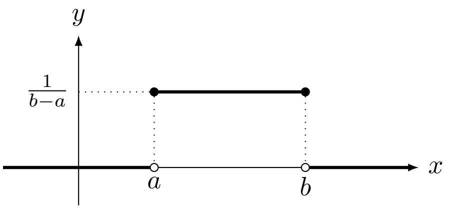
8.1.1　一様分布

定義 8.2

$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする．確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (x \in [a,b]) \\ 0 & (x \notin [a,b]) \end{cases}$$

で与えられる分布を**連続型一様分布**といい，$U(a,b)$ で表す．



演習問題 8.3. (1)　一様分布の密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(2)　一様分布の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ を求め，グラフを描け．

8.1.2　正規分布

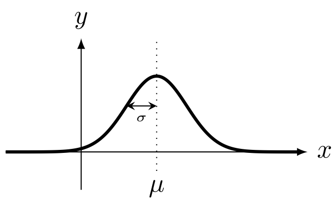
定義 8.4

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}$，$\sigma > 0$ とする．確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で与えられる分布を，平均 μ，分散 σ^2 の**正規分布**といい，$N(\mu, \sigma^2)$ で表す．

正規分布の中でも特に，$\mu = 0$, $\sigma = 1$ とおいた $N(0,1)$ はよく用いられており，**標準正規分布**と呼ばれている．



なお，一般には定義上のある点において $f(x) \geqq 1$ となることもあり得る点に注意．

演習問題 8.5. 平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

演習問題 8.6. $f(x)$ を平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の密度関数とする．

(1) $y = f(x)$ の最大値・最小値を調べよ．

(2) $y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

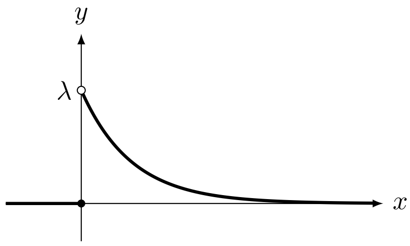
8.1.3 指数分布

定義 8.7

$\lambda > 0$ とする．確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x > 0), \\ 0 & (x \leqq 0) \end{cases}$$

で与えられる分布を，パラメータ $\lambda > 0$ を持つ**指数分布**という．



演習問題 8.8. (1) パラメータ λ を持つ指数分布の密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(2) 指数分布の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ を求め，グラフを描け．

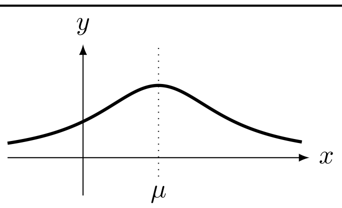
8.1.4 コーシー分布

定義 8.9

$\mu, \sigma \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ とする．確率密度関数 $f(x)$ が

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sigma} \cdot \frac{1}{1 + (\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \quad (x \in \mathbb{R})$$

で与えられる分布を，パラメータ μ，σ をもつ**コーシー分布**という．ただし $\sigma > 0$ とする．



演習問題 8.10. (1) パラメータ μ，$\sigma > 0$ をもつコーシー分布の密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(2) コーシー分布の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ を求め，グラフを描け．

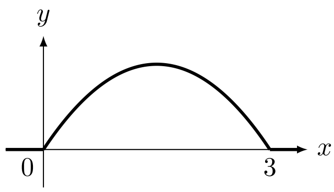
8.2 その他の連続型確率変数の例

例題 8.11

定数 c を用いて関数 $f(x)$ を，

$$f(x) = \begin{cases} cx(3-x) & (x \in [0,3]) \\ 0 & (x \notin [0,3]) \end{cases}$$

により定める．このとき $f(x)$ が確率密度関数となるためには定数 c の値はいくらである必要があるか．



8.3 特異型

確率変数の中には，離散型でも連続型でもないようなものも存在する．そのようなものは**特異型**と呼ばれる．この講義ではこれ以上の深入りをしないが，例えば**カントール関数**を密度関数に持つ分布は特異型である．

演習問題 8

(1)　一様分布に関して以下の問いに答えよ．

(a)　一様分布の密度関数 $f(x)$ が以下の等式を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(b)　一様分布の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ を求め，グラフを描け．

(2)　平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(3)　$f(x)$ を平均 μ，分散 σ^2 の正規分布の密度関数とする．

(a)　$y = f(x)$ の最大値・最小値を調べよ．

(b)　$y = f(x)$ のグラフの変曲点の x 座標を求めよ．

(4)　パラメータ λ を持つ指数分布について，以下に答えよ．

(a)　指数分布の密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(b)　指数分布の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ を求め，グラフを描け．

(5)　パラメータ μ，$\sigma > 0$ をもつコーシー分布について，以下に答えよ．

(a)　コーシーの密度関数 $f(x)$ が以下を満たすことを確認せよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$$

(b)　コーシー分布の分布関数 $F(x) = P(X \leqq x)$ を求め，グラフを描け．

(6)　次の関数が確率密度関数になるとき，c の値を求めよ．

(a)　$f(x) = \begin{cases} c\sin x & (0 \leqq x \leqq \pi) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

(b)　$f(x) = \begin{cases} c\sqrt{1-x^2} & (-1 < x < 1) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$