5　確率変数と分布

導入

確率を用いていろいろな処理を行うとき，事象のままでは煩雑であり，取り扱いづらいことが多い．そのようなときには事象を数値に変換して考えるほうが処理しやすく，また理解もしやすくなる．今回は数値化するときの重要な概念である確率変数と確率分布を学ぶ．

5.1　有限集合における確率変数

まずは具体例を通して考察する．サイコロを二つ振って出た目の和を計算する試行を考える．まずはサイコロを二つ振って出た目の和についての表を見てみよう．

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

この表にあるように，サイコロを二つ振って起こりうる事象は全部で 36 通りある．例えばその中で出た目の和が「7」になるのは全部で 6 通りであるので，サイコロを二つ振ったとき，出た目の和が 7 になる確率は

$$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

ということになる．サイコロの出た目の和を X とおくと，X のとる各々の値に対して，以下のような確率が考えられる．

X の値	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	計
確率	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

この X のように，取りうる値に対して確率が対応する変数を**確率変数**という．確率変数の取りうる値とその確率を一緒にして**確率分布**という．一般の有限集合に対しては，以下のように定義される．

定義 5.1

Ω を有限集合とし，さらに Ω の各点での確率 P が定義されていると仮定する．**確率変数**とは，Ω に対して数値を対応させる写像 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ のことである．Ω が有限集合なので，X の値域も有限集合 $\{x_1, \dots, x_n\}$ である．表にまとめると以下のようになる．

X の値	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
確率	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

このような表を**確率分布表**という．ただし p_k は $X(\omega) = x_k$ となる確率，すなわち

$$p_k = P(X = x_k) = P\bigl(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = x_k\}\bigr)$$

のことである．

例 5.2. 先ほどのサイコロ二つの例だと，

$$\begin{aligned}\Omega &= \{(i,j);\ i = 1, \dots, 6,\ j = 1, \dots, 6\}\\ &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ &\qquad (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ &\qquad (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ &\qquad (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ &\qquad (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ &\qquad (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}\end{aligned}$$

が全体集合であり，その各元の出現確率は

$$P\bigl((i,j)\bigr) = \frac{1}{36} \quad (i,j) \in \Omega$$

である．確率変数 X は

$$X\bigl((i,j)\bigr) = i + j \quad ((i,j) \in \Omega)$$

によって与えられ，その値域は $\{2, 3, \dots, 12\}$ である．

演習問題 5.3. サイコロを二つ振って，出た目の積 X について考える．

(1)　X の確率分布表を求めよ．

(2)　出た目の和が偶数になる確率を求めよ．

(3)　出た目の和が平方数になる確率を求めよ．ただし平方数とは，整数 n を用いて n^2 と書ける数のことである．

注意. この問題のように確率変数が複数の値を取る場合，以下のように記述することもできる．$A_1 = \bigl\{n;\ n \text{ は偶数}\bigr\}$ とおけば

$$P(X \in A_1) = P(X = 2) + P(X = 4) + \cdots + P(X = 12).$$

確率は一般的な事象に対して定まるものであるが，それだと定量的に扱いづらいことが多い[1)]．そこで確率変数という，事象を数値化するものを導入して定量的に扱いやすくするのである．さらにこの考えを推し進めて，初めから確率変数が与えられているとして議論を進めていくこともある．

5.2　一般の場合の確率変数

全事象 Ω が有限集合のときはすべてを列挙することができるので理論的な難しさはなかった．しかし無限集合も含めて扱おうとするともはや無条件ではうまく行かない場合も現れてきて，何かしらの条件を課す必要が生じる．

確率変数は，Ω を数値に変換する**写像**であった．変換した先でも「確率」を扱いたいので，変換した先でも確率を考えられるようになっていて欲しい．そのためには写像とそれぞれの σ 加法族について，以下のような性質が必要になってくる．

定義 5.4

二つの可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ が与えられたとする．このとき写像 $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ が**可測**とは，

$$A \in \mathcal{F}_2 \Rightarrow f^{-1}(A) := \{\omega \in \Omega_1;\, f(\omega) \in A\} \in \mathcal{F}_1$$

を満たすこととする．

一般的な設定で記述をしたが，本講義では $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ と思って良い．数値に変換して考えるということなので，注目したいのは送った先の空間，つまり $(\Omega_2, \mathcal{F}_2) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ である．そこで可測な集合は，元の空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ でも可測であって欲しい．それを数式を用いて定式化したものが定義 5.4 である．

定義 5.5

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とする．Ω 上の**確率変数** X とは，$(\Omega, \mathcal{F})$ から $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ への可測関数 $X\colon \Omega \to \mathbb{R}$ のことである．すなわち任意の $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ に対して，以下を満たすものである．

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega;\, X(\omega) \in A\} = \{X \in A\} \in \mathcal{F}.$$

確率変数 X に付随して，「分布」および「分布関数」というものを定義できる．一般の確率変数を理解する際には，分布もしくは分布関数を通して理解するほうが易しいので，先にこちらを定義する．

定義 5.6

X を確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の確率変数とする．

(1)　確率変数 X に付随して定義される $\mathbb{R}$ 上の確率測度 P_X を，確率変数 X の**分布**もしくは**法則**という：

$$P_X(A) := P(X^{-1}(A)) \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

(2)　P_X に付随して定義される $\mathbb{R}$ 上の関数

$$F_X(x) := P_X((-\infty, x]) \quad (x \in \mathbb{R})$$

を，確率変数 X の**分布関数**という．

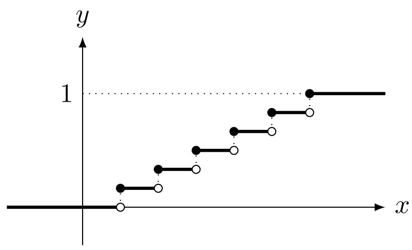
注意． 分布関数は，一般の確率測度 μ に対して定義されるものである：

$$F(x) = F_\mu(x) := \mu((-\infty, x]) \quad (x \in \mathbb{R})$$

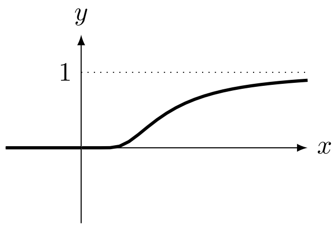
たとえばサイコロを振った際の出目についての以下の確率変数 X について考える．

X の値	1	2	3	4	5	6	計
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

この確率変数 X に対応する分布関数 F_X のグラフは以下のようになる．



連続型の場合の分布関数 F_X は，例えば以下のような形になる．



このように分布関数 F_X は，単調増加で，$x \to -\infty$ のときに 0，$x \to +\infty$ のときに 1 になるような関数になる．

定義より，もとの確率空間 Ω の性質に関わらずに分布もしくは分布関数は実数 $\mathbb{R}$ 上のものになっていて，非常に扱いやすい．色々な現象を統一的に扱う

1)　今は有限集合で考えているので「各点ごとの確率」なるものが意味を持ったが，無限集合になると意味をなさないこともある．

ことができるように，以降は分布もしくは分布関数に着目していくことになる．分布関数 F には以下の 3 つの型があり，確率変数 X に付随する分布関数 F_X の型に応じて〇〇型の確率変数と言ったりする．

(1) 不連続型（離散型）
(2) 絶対連続型
(3) 特異型

本講義ではこのうち離散型確率変数と（絶対）連続型確率変数について取り扱う．

まとめ

- 有限集合上の確率変数について
- 確率変数とは，事象を数値化するもの
- 確率変数に付随して，分布と分布関数が定義される

演習問題 5

(1) サイコロを二つ振って，出た目の積 X について考える．
   - (a) X の確率分布表を求めよ．
   - (b) 出た目の和が偶数になる確率を求めよ．
   - (c) 出た目の和が平方数になる確率を求めよ．ただし平方数とは，整数 n を用いて n^2 と書ける数のことである．

(2) A,B の 2 つの袋があり，A の袋には 1 から 5 までの数字が書かれた玉が 1 つずつ，B の袋には 1 から 7 までの数字がかかれた玉が 1 つずつ入っている．2 つの袋から 1 つずつ玉を取り出し，A から取り出した玉の数字を a，B から取り出した玉の数字を b とするとき，次の確率を求めよ．
   - (a) $a+b$ が偶数になる
   - (b) ab が 3 の倍数になる
   - (c) $a^2+b^2<25$ を満たす

(3) 数直線上の点 P は次の規則で動く．最初は原点にあり，サイコロを 1 回投げて，1 の目が出たら右に 2 だけ動き，2 または 3 の目が出たら右に 1 だけ動き，4 以上の目が出たら左に 1 だけ動く．サイコロを 4 回投げたとき，点 P が次の座標にある確率を求めよ．
   - (a) 8
   - (b) -2
   - (c) 5

中間試験について

- 6 月 9 日（月）の講義中に実施．
- 第 6 回までの講義内容から出題．用語についても確認をしておくこと．演習問題の出題範囲は
  - 演習問題 1　(1),(2),(3)
  - 演習問題 2　(1),(2),(4),(5),(7),(8),(9)
  - 演習問題 3　(1)(a),(b)
  - 演習問題 4　なし
  - 演習問題 5　(1),(2),(3)