4　実数上の確率測度

導入

前回は有限集合上における確率測度を考えた．今回は一般の集合における確率測度を考える．またルベーグ測度もここで定義をする．その定義は複雑であるが，要点は区間 $I=(a,b)$ に対しては

$$m(I)=b-a$$

となる測度であって，平行移動不変，完備性といった良い性質を持つものであるということである．途中の細かい議論を完全にフォローできなくても構わないが，その要点は抑えておいてほしい．

4.1　確率測度の定義

まず可測空間を思い出そう．可測空間とは，全体集合 Ω と σ 加法族 $\mathcal{F}\subset\mathcal{P}(\Omega)$ の組 $(\Omega,\mathcal{F})$ のことである．σ 加法族とは次の三条件

(1)　$\Omega\in\mathcal{F}$

(2)　$A\in\mathcal{F}\Rightarrow A^c\in\mathcal{F}$

(3)　$A_n\in\mathcal{F}\ (n=1,2,3,\dots)\Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\in\mathcal{F}$

を満たすもので，大雑把に言えば「大きさを測ることのできる集合を規定」するものである．

定義 4.1

$(\Omega,\mathcal{F})$ を可測空間とする．写像 $P\colon\mathcal{F}\to[0,1]$ が以下の条件を満たすとき，**確率測度**という．

(1)　$P(\Omega)=1$

(2)　$A_n\ (n=1,2,3,\dots)$ が互いに素，すなわち $A_i\cap A_j=\varnothing\ (i\neq j)$ ならば

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

この条件を満たす 3 つ組 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ を**確率空間**という[1)]．

条件 (2) を σ **加法性**という．また，条件 (2) よりも弱い条件：有限個の互いに素な $A_1,\dots,A_n$ に対して

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$$

が成り立つことのみを仮定する場合は**有限加法的**な確率測度という．

確率測度の基本的な性質として，次が成り立つ．

補題 4.2

(1)　$P(\varnothing)=0$.

(2)　$A,B\in\mathcal{F}$ が $A\subset B$ ならば $P(A)\leqq P(B)$ である．

証明． (1)　$\Omega=\Omega\cup\varnothing,\ \varnothing\cap\Omega=\varnothing$ なので

$$P(\Omega)=P(\Omega\cup\varnothing)=P(\Omega)+P(\varnothing),$$

これより $P(\varnothing)=0$ となる．

(2)　$A\subset B$ ならば $B=A\sqcup(B\setminus A)$ と書けるので，$P(B\setminus A)\geqq 0$ より

$$P(B)=P(A\cup(B\setminus A))=P(A)+P(B\setminus A)\geqq P(A)$$

となる．

□

命題 4.3

$(\Omega,\mathcal{F})$ 上の確率測度 P について，任意の集合列 $A_n\in\mathcal{F}\ (n=1,2,\dots)$ に対して次が成立する．

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\leqq\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)$$

証明．　二つの集合 A,B に対して

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A)\leqq P(A)+P(B)$$

であることより明らか．　□

4.2　確率測度の例

ここでは確率測度の例をいくつか紹介する．

4.2.1　有限集合上の確率測度

$\Omega=\{x_1,\dots,x_n\}$ を有限集合とする．また正の数 $p_1,\dots,p_n>0$ で $p_1+\dots+p_n=1$ を満たすものに対し

$$P(\{x_i\})=p_i\quad(i=1,\dots,n)$$

1)　なおこの条件 (1) を省き $P\colon\mathcal{F}\to[0,+\infty]$ としたものを**測度**という．したがって，確率測度とは全体集合での値が 1 になる測度であるということもできる．

とすれば，これは $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ 上の確率測度になる．

したがって定義 4.1 は有限集合上の確率測度の自然な一般化になっている．以下で実数上のボレル加法族 $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ における測度の中でも，特に重要なものを紹介する．

4.2.2 ボレル測度

定義 4.4

区間 $I = (a, b)$ に対して

$$m(I) = b - a$$

とすれば，m は測度である．これを**ボレル測度**という．

演習問題 4.5. ボレル測度が実際に測度であることを確認せよ．また全体集合を $\Omega = (0, 1)$ とすると，これは確率測度になることを確認せよ．

4.2.3 ディラック測度

定義 4.6

$a \in \mathbb{R}$ として，$\mathbb{R}$ 上の測度 δ_a が

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & (a \in A) \\ 0 & (a \notin A) \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}))$$

によって定まる．このように定まる測度 δ_a を**ディラック測度**あるいは**ディラックの δ 測度**という．また a を δ_a の台 (support) という．

演習問題 4.7. ディラック測度が実際に確率測度であることを確認せよ．

4.2.4 実数空間上の測度の例

定義 4.8

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ 全体でリーマン可積分な関数とし，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

を満たすものとする．このとき，区間 $I = (a, b)$ に対して

$$P(I) = \int_a^b f(x)\, dx$$

とすれば，P は確率測度になる．

演習問題 4.9. 上記のように定義した P が実際に確率測度であることを確認せよ．

4.3 ルベーグ測度

応用上で最も重要な $\mathbb{R}$ 上の測度は**ルベーグ測度**である．これは区間 $I = (a, b)$ に対しては

$$m(I) = b - a$$

となっておりボレル測度と同じであるが，考える σ 加法族がボレル加法族よりも大きくなっている．それにより理論的に非常に扱いやすくなるのである．

ルベーグ測度の正確な定義は後回しにするとして，まずはその性質を見ておこう．

命題 4.10

ルベーグ測度 m は以下を満たす．

(1) 区間 $I = (a, b)$ に対して $m(I) = b - a$

(2) $A \subset B$ ならば $m(A) \leqq m(B)$

(3) $m(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leqq \sum_{i=1}^{\infty} m(A_i)$

(4) 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $m(A + x) = m(A)$

(5) ルベーグ測度は**完備**である

このうち (1)〜(3) は測度共通の性質である．(4) は**平行移動不変性**と呼ばれるもので，ボレル測度も同じ性質を持っているが，一般の測度が持っているとは限らない性質である．ただし，集合 A と実数 x に対して

$$A + x := \{a + x;\, a \in A\}$$

と定義する．これは集合 A を x だけに平行移動した集合である．また (5) の性質がルベーグ測度において特筆すべき性質である．測度空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ が**完備**とは，測度 0 の可測集合の部分集合がすべて可測であるときにいう．この性質がルベーグ測度が重要な理由である．「完備化」という操作があり，実はボレル測度を完備化したものがルベーグ測度になっている．

4.3.1 ルベーグ測度の定義

これからルベーグ測度を定義していこう．まずは**外測度**を定義する．

定義 4.11

任意の集合 $A \subset \mathbb{R}$ に対して，A を覆う加算個の開区間の長さの和の下限

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} |I_j|; \quad \begin{array}{l} \{I_j\} \text{ は開区間列} \\ A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} I_j \end{array} \right\}$$

を A のルベーグ外測度という．

外測度はどんな集合に対しても定義されることに注意する．ルベーグ測度における σ 加法族は，この外測度を利用して定義される．

定義 4.12

$E \subset \mathbb{R}$ が**ルベーグ可測**，あるいはルベーグ可測集合であるとは，任意の $A \subset \mathbb{R}$ に対して

$$m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^c) \tag{4.1}$$

が成り立つことをいう．ルベーグ可測な関数全体を $\mathcal{L}$ で表す．

注意. ボレル可測ならばルベーグ可測である．

条件 (4.1) を通してルベーグ可測性を定義する方法を，**カラテオドリの方法**という．元々は，有界集合 E に対して内測度

$$m_*(E) = |I| - m^*(I \setminus E)$$

(ただし I は $E \subset I$ なる区間) を定義し，

$$m^*(E) = m_*(E)$$

なるときに可測と定めていた．しかしこの方法では有界な E に対してしか定義されないなど理論的には若干不満の残るものであった．カラテオドリの方法はその不満点を解消してくれている．ルベーグ測度の定義が直感と反するものになっているのは，そのような背景がある．

定義 4.13

$E \in \mathcal{L}$ のとき，$m(E) = m^*(E)$ と定義する．$(\mathbb{R}, \mathcal{L}, m)$ をルベーグ測度という．

まとめ

- 一般の確率測度の定義
- (確率) 測度の例
- ルベーグ測度

演習問題 4

(1) ボレル測度が実際に測度であることを確認せよ．

(2) ディラック測度が実際に確率測度であることを確認せよ．

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ なるリーマン可積分関数 $f(x)$ を用いて定義される集合関数

$$P(I) = \int_a^b f(x)\,dx \quad I = (a,b)$$

が，実際に確率測度であることを確認せよ．

(4) $\Omega = [0,1]$ とし，その部分集合 C を以下のような集合の極限として定義する．

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= [0,\tfrac{1}{3}] \cup [\tfrac{2}{3},1] \\ C_2 &= [0,\tfrac{1}{9}] \cup [\tfrac{2}{9},\tfrac{3}{9}] \cup [\tfrac{6}{9},\tfrac{7}{9}] \cup [\tfrac{8}{9},1] \\ &\ \vdots \end{aligned}$$

すなわち，まず $C_0 = \Omega$ を三等分し，その真ん中の部分を取り除いたものを C_1 とする．次に C_1 の各区間をそれぞれ三等分し，それぞれの真ん中の部分を取り除いたものを C_2 とする．この操作を繰り返す．したがって C_n は C_{n-1} の各区間それぞれ三等分し，それぞれの真ん中の部分を取り除いたものである．そして $C = \cap_{i=1}^{\infty} C_i$ と定める．C の外測度 $m^*(C)$ を求めよ．

(5) 上の問題で定義した集合 C は，$x \in \Omega$ を三進展開 $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ した際に，1 が現れないような数全体の集合と一致することを確認せよ．特に $x \in C$ に対して $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$ とするとき，$f(x) = 0.b_1b_2b_3\ldots$，$(b_i = a_i/2)$ としてこれを二進展開表示とみなすことで，C は実数濃度を持つことを確認せよ．

注意． (4) で構成される集合は**カントール集合**という名前がついている．