3　ボレル集合族

導入

実数のような無限集合上でも確率を考えたいが，有限集合上で扱ったような「各点ごとの確率」ということは期待できない．しかし確率は部分集合に対しても定義されていた．そこで無限集合に対しても「部分集合に対しての確率」を考えることで同様の議論ができるのではないかということが考えられる．しかしながら，「部分集合」に何の制約も課さないと，この議論はうまくいかない．よって，「確率を考える際に都合の良い部分集合族」というものが必要になる．それが今回定義する σ **加法族**である．一般の集合上での確率は，この σ 加法族を通して議論を行うことになる．

3.1　σ 加法族の定義

まず確率の基本性質を思い出そう．

確率の基本性質

(a)　任意の事象 A に対して $0 \leqq P(A) \leqq 1$

(b)　全事象 Ω に対して $P(\Omega) = 1$,
　　空事象 $\varnothing$ に対して $P(\varnothing) = 0$

(c)　$P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$

前回は Ω を有限集合として考えた．この性質を少し見方を変えてみると，A, B という事象に対して確率が決まるなら，A^c や $A \cup B$ に対しても確率を決められると見ることもできる．この考えに基づいて抽象化する．

Ω を一般の集合とする．Ω のべき集合 $\mathcal{P}(\Omega)$ とは，Ω の部分集合全体からなる集合族であったことを思い出そう．まず σ **加法族**というものを定義する．

定義 3.1

$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ が σ **加法族**とは，$\mathcal{F}$ が以下の三条件を満たすときにいう[1]．

(1)　$\Omega \in \mathcal{F}$

(2)　$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

(3)　$A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, 3, \dots) \Rightarrow \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

組 $(\Omega, \mathcal{F})$ を**可測空間**という．

注意. なお上記 1,2 に，3 の代わりにその条件を緩めた以下の条件を仮定するときには**有限加法族**という．

$$\text{有限個の } A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{F} \text{ に対し } \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{F}$$

σ 加法族はもちろん有限加法族であるが，逆は正しくない．

例 3.2. (1)　$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega)$ は σ 加法族である．

(2)　$\mathcal{F}_2 = \{\varnothing, \Omega\}$ は σ 加法族である．

(3)　$A \subset \Omega$ を固定したとき，$\mathcal{F} = \{\varnothing, A, A^c, \Omega\}$ は σ 加法族である．

可測空間という言葉からもわかるように，$\mathcal{F}$ は「大きさを測ることのできる Ω の部分集合を規定」する．すなわち，この定義のニュアンスとしては A の大きさがわかれば A^c の大きさもわかる，A, B の大きさが分かれば $A \cup B$ の大きさもわかる，といった感じである．

命題 3.3

σ 加法族 $\mathcal{F}$ について，次が成立する．

(1)　$\varnothing \in \mathcal{F}$

(2)　$A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, \dots) \implies \displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$

証明．　(1) $\varnothing = \Omega^c$ より明らか．

(2) ド・モルガンの法則より

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n^c\right)^c$$

となることよりわかる．　□

命題 3.4

Ω 上の σ 加法族 $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ が与えられたとする．このとき，$\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ も σ 加法族である．

証明．　明らか．　□

集合族 $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ が与えられたとき，$\mathcal{A}$ を含む最小の σ 加法族 $\mathcal{F}$，すなわち

$$\sigma \text{ 加法族 } \mathcal{G} \text{ が } \mathcal{A} \subset \mathcal{G} \text{ となるならば } \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$$

---

1)　ここの σ は和 (sum) の頭文字 s に対応するギリシャ文字である．すなわち，和集合に関して「良い」性質を持つというニュアンスである．

を満たすような σ 加法族 $\mathcal{F}$ を，$\sigma(\mathcal{A})$ と書き，$\mathcal{A}$ **が生成する** σ **加法族**という．$\sigma(\mathcal{A})$ は一意的に存在し，

$$\sigma(\mathcal{A}) = \bigcap_{\substack{\mathcal{G}:\ \sigma \text{ 加法族} \\ \mathcal{G} \supset \mathcal{A}}} \mathcal{G}$$

と表すことができる．

3.1.1 有限集合上の σ 加法族

演習問題 3.5. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．次の $\mathcal{A}$ に対して $\sigma(\mathcal{A})$ を決定せよ．

(1) $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$
(2) $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}\}$
(3) $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

3.2 ボレル集合族

まず $\mathbb{R}$ 上の区間について復習をしよう．開区間，閉区間はそれぞれ

$$(a, b) := \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}$$
$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leqq x \leqq b\}$$

のように定義された[2)]．また

$$B_r(a) := \{x \in \mathbb{R};\ -r < x - a < r\} = (a - r, a + r)$$

を $a \in \mathbb{R}$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球という．

定義 3.6

$\mathbb{R}$ の部分集合 A について，任意の $a \in A$ に対してある正数 $r > 0$ で $B_r(a) \subset A$ を満たすものが存在するとき，A は**開集合**であるという．また，補集合が開集合となる集合を**閉集合**という．

次は開集合の基本的な性質である．

命題 3.7

開集合は以下の性質を満たす．

(1) I_1, I_2 が開集合 $\Rightarrow I_1 \cup I_2,\ I_1 \cap I_2$ も開集合
(2) 各 I_α $(\alpha \in A)$ が開集合 $\Rightarrow \displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ も開集合
(3) 開集合 I の補集合 I^c は閉集合

2) 文献によっては開集合を $]a, b[$ のように表記することもある．これは (a, b) は平面上の点を表す際にも用いられており，それとの混同を避けるためである．

注意. 開集合族 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して，$\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ は必ずしも開集合になるとは限らない．

証明． (1) $a \in I_1 \cup I_2$ とすると $a \in I_1$ または $a \in I_2$ である．$a \in I_1$ とすればある $r_1 > 0$ が存在して $B_{r_1}(a) \subset I_1$ であるので $B_{r_1}(a) \subset I_1 \cup I_2$．$a \in I_2$ としても同様．したがって $I_1 \cup I_2$ は開集合．

$a \in I_1 \cap I_2$ とすると $a \in I_i$ $(i = 1, 2)$ であるので，それぞれの i に対してある r_i が存在して $B_{r_i}(a) \subset I_i$．よって $r = \min(r_1, r_2)$ とすれば $B_r(a) \subset I_1$ かつ $B_r(a) \subset I_2$ すなわち $B_r(a) \subset I_1 \cap I_2$．よって $I_1 \cap I_2$ は開集合．

(2) $a \in \displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ とすると，ある α に対して $a \in I_\alpha$ である．このとき I_α は開集合なのである $r_\alpha > 0$ が存在して $B_{r_\alpha}(a) \subset I_\alpha$ であるので $B_{r_\alpha}(a) \subset \displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$．したがって $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in A} I_\alpha$ は開集合．

(3) 閉集合の定義そのものである． □

定義 3.8

$\Omega = \mathbb{R}$ とする．$\mathcal{A} = \{\mathbb{R}$ の開区間すべて $\}$ とする際，$\sigma(\mathcal{A})$ を $\mathbb{R}$ のボレル集合族という．また $\sigma(\mathcal{A})$ の元をボレル集合という．

注意. 正確には位相空間 $(\Omega, \mathcal{O})$ が与えられたときに，$\sigma(\mathcal{O})$ をボレル集合族という．すなわちボレル集合族とは，任意の開集合の大きさを計ることができる最小の可測空間を与えるものである．

たとえば次の集合は $\mathbb{R}$ のボレル集合である．実数 a, b $(a < b)$ に対して

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, b], \quad \{a\},$$
$$(-\infty, b), \quad (a, \infty), (a, b) \cup (c, d)$$

演習問題 3.9. 上記の集合が実際に $\mathbb{R}$ のボレル集合になっていることを示せ．

実数直線 $\mathbb{R}$ 上のボレル集合**でない**集合も存在するが，構成するのは難しい．

まとめ

- σ 加法族
- ボレル加法族は，実数上で確率を考える際に最も基本的な集合族である．開区間・閉区間など基本的なものはすべて含まれている．

演習問題 3

(1) $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とする．次の $\mathcal{A}$ に対して $\sigma(\mathcal{A})$ を決定せよ．

(a) $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$

(b) $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}\}$

(c) $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

(2) ある開集合族 $\{I_\alpha\}_{\alpha \in A}$ で，$\bigcap_{\alpha \in A} I_\alpha$ が閉集合にならないものを構成せよ．

(3) 以下の集合が $\mathbb{R}$ のボレル加法族に属していることを示せ．実数 a, b $(a < b)$ に対して

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, b], \quad \{a\},$$
$$(-\infty, b), \quad (a, \infty)$$

(4) $\Omega = (-1, 1)$ とする．以下の $\mathcal{A}$ に対して $\sigma(\mathcal{A})$ を決定せよ．

$$\mathcal{A} = \{(a, 0);\, -1 < a < 0\} \cup \{(0, a);\, 0 < a < 1\}$$

(5) $\Omega = (-1, 1)$ とする．以下の $\mathcal{A}$ に対して $\sigma(\mathcal{A})$ を決定せよ．

$$\mathcal{A} = \{(-1, -\tfrac{1}{2}), (-\tfrac{1}{2}, 0), (0, \tfrac{1}{2}), (\tfrac{1}{2}, 1)\}$$

(6) $\Omega = (-1, 1)$ とし，N を 2 以上の自然数とする．以下の $\mathcal{A}$ に対して $\sigma(\mathcal{A})$ を決定せよ．

$$\mathcal{A} = \left\{(\tfrac{k}{N}, \tfrac{k+1}{N});\, k = -N, \ldots, N-1\right\}$$