2　有限集合上の確率測度

導入

まず「確率」というものの復習をしておこう．イメージしやすいのはコイントスやサイコロの目などであろう．例えばコイントスだと，「コインを 2 枚投げて片方が表，もう片方が裏になる確率は何か」，あるいはサイコロの目だと「サイコロを二つ振ったとき，出た目の和が 7 になる確率は何か」といった具合である．今回はまずサイコロの目の確率について，もう少し詳しく見てみよう．

2.1　サイコロ

サイコロを投げる試行を考える．このとき

$$\omega_i : i \text{ の目が出る} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

とおくと，ω_i は根元事象であり，

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_6\}$$

が全事象である．さらに

事象 A を「偶数の目が出る」，
事象 B を「奇数の目が出る」，
事象 C を「3 以下の目が出る」

とそれぞれおくと

$$A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$$
$$B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$$
$$C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$$

となり，それぞれの確率は以下のようになる．

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2}.$$

演習問題 2.1. 上記の Ω および A, B, C について，次の事象が起こる確率を求めよ．

(1)　$A \cup B$
(2)　$A \cap C$
(3)　A^c

解． それぞれを計算すると

$$A \cup B = \Omega, \qquad A \cap C = \{\omega_2\}, \qquad A^c = B$$

であるので，

$$P(A \cup B) = P(\Omega) = 1,$$
$$P(A \cap C) = \frac{1}{6},$$
$$P(A^c) = P(B) = \frac{1}{2}$$

となる．□

「何かしらの条件を満たす確率」は，Ω の部分集合を引数とする関数，すなわち**集合関数**と自然に思えることに注意する．「確率 P」に求められる性質としては，以下の 3 つが挙げられる．

確率の基本性質

(a)　任意の事象 A に対して $0 \leqq P(A) \leqq 1$
(b)　全事象 Ω に対して $P(\Omega) = 1$,
　　空事象 $\varnothing$ に対して $P(\varnothing) = 0$
(c)　$A \cap B = \varnothing$ なる事象 A, B に対して

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

この中で特に重要な性質は (3) である．これら 3 つの性質からすぐに導かれる確率の性質をまとめておく．

定理 2.2

任意の事象 A, B に対して，次が成り立つ．

(1)　$A \subset B \implies P(A) \leqq P(B)$
(2)　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
(3)　$P(A^c) = 1 - P(A)$

証明． (1)　$A \subset B$ より

$$B = A \cup (B \setminus A), \quad A \cap (B \setminus A) = \varnothing$$

と書けるので，性質 (3) と性質 (1) より

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geqq P(A) \qquad \square$$

(2)

$$A = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B)$$
$$B = (B \setminus A) \sqcap (A \cap B)$$
$$A \cup B = (A \setminus B) \sqcup (A \cap B) \sqcup (B \setminus A)$$

より

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B)$$
$$P(B) = P(B \setminus A) + P(A \cap B)$$
$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) + P(B \setminus A)$$

3 行目の式から $P(A \setminus B)$ と $P(B \setminus A)$ を消去すればよい． □

(3) $A \cup A^c = \Omega$ および $A \cap A^c = \varnothing$ なので，性質 (2)(3) より

$$1 = P(\Omega) = P(A \sqcup A^c) = P(A) + P(A^c)$$

あとは $P(A)$ を移項すればよい． □

2.2 条件付き確率

確率を考える際に，「ある事象が起こったときに別の事象が起こる確率」すなわち**条件付き確率**を考えることも多い．

まずは次の例で見てみよう．

例 2.3. あるグループの血液型を調べたところ次の表のような結果が得られた．このグループからランダムに一人を選ぶ試行を考える．この時選ばれた人が A 型である確率は $\frac{16}{50}$ である．

	A	B	O	AB	計
グループ 1	10	9	7	4	30
グループ 2	6	7	5	2	20
計	16	16	12	6	50

また選ばれた人が所属しているのがグループ 2 だった場合，この人が A 型である確率は $\frac{6}{20}$ となる．ここで

事象 E： 選ばれた人がグループ 2 に属する
事象 F： 選ばれた人が A 型

とおくと，$\frac{6}{20}$ は，事象 E が起こったときに事象 F が起こる確率になる．このような確率を，事象 E が起こったときに事象 F が起こる**条件付き確率**と呼び，$P(F|E)$ で表す．この条件付確率は

$$P(E) = \frac{20}{50}, \quad P(E \cap F) = \frac{6}{50}$$

だから

$$P(F|E) = \frac{6}{20} = \frac{6/50}{20/50} = \frac{P(E \cap F)}{P(E)}$$

となる．すなわち，E を全事象と捉えなおして，その中で F が起こる確率であると解釈できる．

定義 2.4

事象 A, B に対して $P(A) > 0$ のとき，事象 A がおこったときの事象 B の起こる条件付き確率 $P(B|A)$ を

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

と定義する．以下の定理より，$P(\cdot|A)$ は A を全事象とする確率になる．

定理 2.5

$P(A) > 0$ とするとき，$P(\cdot|A)$ は確率の基本性質を満たす．

証明． (1) $P(A \cap B) \leqq P(A)$ より $0 \leqq P(B \mid A) \leqq 1$

(2) 明らかに $P(\varnothing|A) = 0$ および $P(A|A) = 1$

(3) $B \cap C = \varnothing$ とするとき

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

であり，$(A \cap B) \cap (A \cap C) = \varnothing$ であるので

$$\begin{aligned} P(B \cup C|A) &= \frac{P(A \cap (B \cup C))}{P(A)} \\ &= \frac{P((A \cap B) \cup (A \cap C))}{P(A)} \\ &= \frac{P(A \cap B) + P(A \cap C)}{P(A)} \\ &= P(B|A) + P(C|A) \end{aligned}$$

となる． □

2.3 ベイズの定理

以下の定理は**ベイズの定理**と呼ばれ，条件をとる事象を入れ替える公式を与えている．このアイデアに基づく推定はベイズ推定と呼ばれ，機械学習におけるオートエンコーダーなど広く活用されている．

定理 2.6

$\Omega = B_1 \sqcup B_2$, $P(B_i) > 0$ $(i = 1, 2)$ と分割されているとする．このとき $P(A) > 0$ なる事象 A に対して

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(B_1)P(A|B_1) + P(B_2)P(A|B_2)}$$

となる．ここで $i = 1, 2$ である．

証明． まず，次の等式

$$\begin{aligned} A &= A \cap \Omega = A \cap (B_1 \sqcup B_2) \\ &= (A \cap B_1) \sqcup (A \cap B_2) \end{aligned}$$

より明らかに

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2). \qquad (2.1)$$

また条件確率の定義より

$$P(A)P(B_i|\, A) = P(A \cap B_i) = P(B_i)P(A|\, B_i)$$

となるので，両辺を $P(A)$ で割って式 (2.1) を使えば示すべき等式を得る． □

2.4 独立性

二つの事象 A, B が独立であるとは，互いの起こる確率に他方が影響を受けないことである．これを式で表現すると，$P(A) > 0$ のとき

$$P(B|\, A) = P(B)$$

と定式化される．すなわち A が起こったかどうかに B の起こる確率が影響を受けないことである．しかし条件付確率を使って定式化すると，$P(A) > 0$ の場合しか適用できず，$P(A) = 0$ の場合が除外されてしまう．そこで

$$\begin{aligned} P(B|\, A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \\ \Longleftrightarrow\ & P(A)P(B|\, A) = P(A \cap B) \end{aligned}$$

を利用して，以下のように定義する．

定義 2.7

事象 A, B が**独立**であるとは，

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

が成り立つことである．

演習問題 2.8. 1 から 20 までの数字が書かれた 20 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを取り出す．取り出されたカードの数字が偶数である事象を A，3 の倍数である事象を B，12 以下の数である事象を C とするとき，次の二つの事象が独立であるかどうかを調べよ．

(a) A と B　(b) B と C　(c) C と A

独立性に関して，以下のような性質を持つ．

命題 2.9

事象 A, B が独立ならば，事象 A, B^c および A^c, B^c も独立である．

証明． 事象 A, B^c が独立であること，すなわち

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c)$$

を示せばよい．$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ であり，$(A \cap B) \cap (A \cap B^c) = \varnothing$ であることより，

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$$

ここで A, B は独立であるので

$$\begin{aligned} P(A \cap B^c) &= P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) \\ &= P(A)P(B^c) \end{aligned}$$

となる． □

まとめ

- 有限集合上の確率とその諸性質
- 条件付き確率
- ベイズの公式

$$P(B_i|\, A) = \frac{P(B_i)P(A|\, B_i)}{P(B_1)P(A|\, B_1) + P(B_2)P(A|\, B_2)}$$

- 独立性

演習問題 2

(1) 全体事象を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, , \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ とし，事象 A、B, C を $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $C = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ とするとき，以下の事象が起こる確率を求めよ．

(a) $A \cup C$ (b) $B \cup C$ (c) $A \cap B$ (d) $B \cap C$ (e) B^c (f) C^c

(2) 1 から 10 までの数字が書かれた 10 枚のカードから 2 枚を同時に取り出すとき，取り出した 2 枚のカードの数の積が偶数となる事象を A，2 枚のカードの数の和が 7 の倍数となる事象を B とする．このとき次の確率を求めよ．

(a) $P(A)$ (b) $P(B)$ (c) $P(A \cap B)$ (d) $P(A \cup B)$ (e) $P((A \cup B)^c)$

(3) 次を示せ．

(a) 有限個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ に対して $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \leqq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(b) 有限個の事象 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ で $A_i \cap A_j = \varnothing$ $(i \neq j)$ を満たすならば $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$

(4) 1 つのサイコロを 4 回投げるとき，次の確率を求めよ．

(a) 3 の倍数の目が 1 回も出ない確率

(b) 3 の倍数の目が 1 回だけ出る確率

(c) 3 の倍数の目が 2 回以上出る確率

(5) 1 から 20 までの数字が書かれた 20 枚のカードから無作為に 1 枚のカードを取り出す．取り出されたカードの数字が偶数である事象を A，3 の倍数である事象を B，12 以下の数である事象を C とするとき，次の二つの事象が独立であるかどうかを調べよ．

(a) A と B (b) B と C (c) C と A

(6) 上記の問題でカードの枚数を N 枚 $(N \geqq 12)$ とするとどうなるか．

(7) ある通信システムでは，送信機は 0 か 1 の信号を送信し，受信機がこれを受信する．送信機が信号 0 を送信する確率は 0.40 であり，信号 1 を送信する確率は 0.60 である．信号 0 が送信されたとき正しく 0 が受信される確率は 0.90 であり，誤って 1 が受信される確率は 0.10 である．また信号 1 が送信されたとき，正しく 1 が受信される確率は 0.85 であり，誤って 0 が受信される確率は 0.15 である．このとき次の確率を求めよ．ただし値は既約分数で答えること．

(a) 送信機が信号を送信したとき，受信機が信号 1 を受信する確率

(b) 受信機が信号 1 を受信したとき，送信機が信号 0 を送信していた確率

(8) ある工場で作られる製品が，規格外である確率は 0.10 である．この製品を最終工程で検査すると，規格内の製品では 0.97 の確率で合格と判定され，規格外の製品でも 0.13 の確率で合格と判定されてしまう．ある製品を最終工程で検査して合格と判定されたとき，この製品が規格外である確率を求めよ．ただし値は既約分数で答えること．

(9) ある病気 X は発症率が非常に低く，一万人に一人の割合で発症するとする．この病気に罹っているかどうかを調べる検査 Y には高い信頼性があり，病気 X を発症している人に検査 Y を行うと，99% の人が陽性を示し，1% の人が陰性を示す．また病気 X を発症していない人に検査 Y を行うと，99% の人が陰性を示し，1% の人が陽性を示す．いま，ある人が検査 Y を受け，結果が陽性であったとき，この人が病気 X を発症している確率を求めよ．ただし値は既約分数で答えること．