10月24日に出題したレポートの解答

(1) これは計算するだけなので，詳しい解説は行わない．

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \tan\theta = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \quad \tan\varphi = \frac{y}{x}$$

であるので，

$$\begin{gathered}
r_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad r_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad r_z = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \\
\theta_x = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)}, \quad \theta_y = \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}(x^2+y^2+z^2)}, \\
\theta_z = \frac{-\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2}, \quad \varphi_x = \frac{-y}{x^2+y^2}, \quad \varphi_y = \frac{x}{x^2+y^2}, \quad \varphi_z = 0.
\end{gathered}$$

(2) $w = f(x,y,z) = F(r,\theta,\varphi)$ とおけば，示すべき等式は

$$w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = w_{rr} + \frac{2}{r}\,w_r + \frac{1}{r^2}\left(w_{\theta\theta} + \frac{1}{\tan\theta}\,w_\theta + \frac{1}{\sin^2\theta}\,w_{\varphi\varphi}\right)$$

である．まず w_{xx} について考える．連鎖律を用いると，

$$\begin{aligned}
w_{xx} &= (w_x)_x = (w_r r_x + w_\theta \theta_x + w_\varphi \varphi_x)_x \\
&= \{(w_r)_x r_x + w_r r_{xx}\} + \{(w_\theta)_x \theta_x + w_\theta \theta_{xx}\} + \{(w_\varphi)_x \varphi_x + w_\varphi \varphi_{xx}\} \\
&= \{(w_{rr} r_x + w_{r\theta}\theta_x + w_{r\varphi}\varphi_x) r_x + w_r r_{xx}\} \\
&\qquad + \{(w_{\theta r} r_x + w_{\theta\theta}\theta_x + w_{\theta\varphi}\varphi_x)\theta_x + w_\theta \theta_{xx}\} \\
&\qquad\quad + \{(w_{\varphi r} r_x + w_{\varphi\theta}\theta_x + w_{\varphi\varphi}\varphi_x)\varphi_x + w_\varphi \varphi_{xx}\} \\
&= r_x^2\, w_{rr} + \theta_x^2\, w_{\theta\theta} + \varphi_x^2\, w_{\varphi\varphi} \\
&\qquad + 2\{r_x\theta_x\, w_{r\theta} + r_x\varphi_x\, w_{r\varphi} + \theta_x\varphi_x\, w_{\theta\varphi}\} \\
&\qquad\quad + r_{xx} w_r + \theta_{xx} w_\theta + \varphi_{xx} w_\varphi
\end{aligned}$$

w_{yy} や w_{zz} は，上式において x を y または z に置き換えたものであるので，$w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}$ は次のように書けることが分かる．

$$\begin{aligned}
&(r_x^2 + r_y^2 + r_z^2) w_{rr} + (\theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2) w_{\theta\theta} + (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) w_{\varphi\varphi} \\
&\quad + 2\{(r_x\theta_x + r_y\theta_y + r_z\theta_z) w_{r\theta} + (r_x\varphi_x + r_y\varphi_y + r_z\varphi_z) w_{r\varphi} + (\theta_x\varphi_x + \theta_y\varphi_y + \theta_z\varphi_z) w_{\theta\varphi}\} \\
&\qquad + (r_{xx} + r_{yy} + r_{zz}) w_r + (\theta_{xx} + \theta_{yy} + \theta_{zz}) w_\theta + (\varphi_{xx} + \varphi_{yy} + \varphi_{zz}) w_\varphi
\end{aligned}$$

最初の 6 項は，(1) の結果を用いれば計算できる．また最後の 3 項は r,θ,φ の x,y,z に関する 2 階偏導関数を計算すれば求まる．まず最初の 6 項を計算する．見やすくするため $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$t = \sqrt{x^2+y^2}$ とおく．まず

$$r_x^2 + r_y^2 + r_z^2 = \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} = 1, \quad \theta_x^2 + \theta_y^2 + \theta_z^2 = \frac{x^2z^2 + y^2z^2 + (x^2+y^2)^2}{t^2r^4} = \frac{1}{r^2},$$

である．続いて，

$$
\begin{aligned}
\varphi_x^2+\varphi_y^2+\varphi_z^2 &= \frac{y^2+x^2+0^2}{t^4}=\frac{1}{x^2+y^2}=\frac{1}{r^2\sin^2\theta},\\
r_x\theta_x+r_y\theta_y+r_z\theta_z &= \frac{x\cdot xz+y\cdot yz-z\cdot(x^2+y^2)}{t\cdot r^3}=0,\\
r_x\varphi_x+r_y\varphi_y+r_z\varphi_z &= \frac{-xy+yx+0}{r\cdot t^2}=0,\\
\theta_x\varphi_x+\theta_y\varphi_y+\theta_z\varphi_z &= \frac{xz\cdot(-y)+yz\cdot x-(x^2+y^2)\cdot 0}{t^3\cdot r^2}=0
\end{aligned}
$$

も分かる．次に r,θ,φ の x,y,z に関する 2 階偏導関数を計算する．$r\cdot r_x=x$ の両辺を x で偏微分すれば $r_x^2+r\cdot r_{xx}=1$ なので，r_{yy}, r_{zz} も同様に計算すれば

$$
r_{xx}=\frac{1-r_x^2}{r},\quad r_{yy}=\frac{1-r_y^2}{r},\quad r_{zz}=\frac{1-r_z^2}{r}
$$

となる．したがって

$$
r_{xx}+r_{yy}+r_{zz}=\frac{3-(r_x^2+r_y^2+r_z^2)}{r}=\frac{2}{r}.
$$

θ に関しては，

$$
r^2\cdot\theta_x=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad r^2\cdot\theta_y=\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad r^2\cdot\theta_z=-\sqrt{x^2+y^2}
$$

の両辺をそれぞれ x, y, z で偏微分して

$$
2rr_x\cdot\theta_x+r^2\theta_{xx}=\frac{zy^2}{t^3},\quad 2rr_y\cdot\theta_x+r^2\theta_{yy}=\frac{zx^2}{t^3},\quad 2rr_z\cdot\theta_z+r^2\theta_{zz}=0
$$

を得るので，これらの式を足すことにより

$$
2r(r_x\theta_x+r_y\theta_y+r_z\theta_z)+r^2(\theta_{xx}+\theta_{yy}+\theta_{zz})=\frac{z}{t}=\frac{1}{\tan\theta}
$$

である．したがって

$$
\theta_{xx}+\theta_{yy}+\theta_{zz}=\frac{1}{r^2\tan\theta}
$$

が分かる．最後に φ についてであるが，$\varphi_{xx}=\frac{2xy}{t^4}$, $\varphi_{yy}=\frac{-2xy}{t^4}$, $\varphi_{zz}=0$ より

$$
\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}=0
$$

であるので，以上を合わせれば，示すべき等式が成立していることが分かる:

$$
w_{xx}+w_{yy}+w_{zz}=w_{rr}+\frac{2}{r}\,w_r+\frac{1}{r^2}\left(w_{\theta\theta}+\frac{1}{\tan\theta}\,w_\theta+\frac{1}{\sin^2\theta}\,w_{\varphi\varphi}\right).
$$

コメント． 3 変数になると計算が煩雑になってきます．したがって，計算も要領していかないと何を計算しているのかがわからなくなってきてしまいます．以上の解答はなるべく要領よく計算してみたものです (もっと要領よくできるかもしれませんが)．そのコツはなるべく文字式のまま計算すること，および補助変数をうまく活用することです．3 変数の連鎖律の計算は試験では出題しませんが (3 変数の極座標変換や 2 変数関数の連鎖律は出題する可能性があります)，この手の計算はおそらくベクトル解析で必要になってくると思います．

注意． ベクトル表記を用いると，もっときれいに書ける．

$$
\begin{aligned}
&\| \nabla r \|^2 w_{rr} + \| \nabla \theta \|^2 w_{\theta\theta} + \| \nabla \varphi \|^2 w_{\varphi\varphi} \\
&\quad +2 \langle \nabla r \,|\, \nabla \theta \rangle \, w_{r\theta} + 2 \langle \nabla r \,|\, \nabla \varphi \rangle \, w_{r\varphi} + 2 \langle \nabla \theta \,|\, \nabla \varphi \rangle \, w_{\theta\varphi} \\
&\qquad +(\Delta\, r) w_r + (\Delta\, \theta) w_\theta + (\Delta\, \varphi) w_\varphi .
\end{aligned}
$$

レポート採点しての感想 (i) どこかのサイトを参考にしたのだろうレポートが幾つかありましたが，微妙に問題を間違えています．また，そのレポートは作用素レベルで示していましたが，作用素は通常の数や関数と勝手が違うので扱いには注意が必要です．例えば，

$$
\frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,y) \frac{\partial}{\partial x} \right) \neq \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) \right) \frac{\partial}{\partial x}
$$

という例からも分かるように，括弧は省略できません．理解していないことをレポートに書かないようにしてください．

(ii) 次に多かった間違いは

$$
\frac{\partial}{\partial x}(F_r r_x + F_\theta \theta_x + F_\varphi \varphi_x) = F_{rr} r_x^2 + F_r r_{xx} + F_{\theta\theta} \theta_x^2 + F_\theta \theta_{xx} + F_{\varphi\varphi} \varphi_x^2 + F_\varphi \varphi_{xx}
$$

とするものです．ここでは F_r などに対しても連鎖律を用いる必要があります．計算した結果が示すべき等式と一致するのは，連鎖律で出てくる他の項がちょうど打消しあって 0 になるためです．